

Geschichtliches.

Gandz, Solomon: The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. *Scientia* 62, 249—257 (1937).

Bortolotti, Ettore: Osservazioni sull'algebra babilonese. *Archeion* 19, 192—195 (1937).

Schultze, Ernst: Die Zahlensysteme der Homerischen Griechen. *Archeion* 19, 179—191 (1937).

Bemerkungen über die in den Homerischen Epen bevorzugten Zahlen (wie 7, 10, 50) und Warnung, sie stets als präzise gemeinte Angaben aufzufassen. *O. Neugebauer*.

Luckey, P.: *Tābit b. Qurra's Buch über die ebenen Sonnenuhren*. *Quell. Stud. Gesch. Math.* B 4, 95—148 (1937).

Ptolemäus lehrt in seinen Schriften drei Methoden der Behandlung trigonometrisch-astronomischer Probleme. Im „Analemma“ benutzt er Umklappungen, um eine ebene Figur zu konstruieren, an der die gesuchten Werte mit einer Art Winkelmesser abgelesen werden können. Dieses Verfahren wird weiter vervollkommen zu einer handlichen nomographischen Methode. In derselben Schrift finden sich dann auch Aufgaben, die rechnerisch gelöst werden, also mit Zuhilfenahme von Sehnentafeln. Alle drei Methoden haben sicherlich eine weitgehende Vorgeschichte, von der wir noch nicht viel wissen. Die rechnerische Durchführung ist wieder dreifach möglich, zunächst — und geschichtlich am frühesten — in einem direkten Verfahren: zu den Bögen auf der Kugel werden die Sehnen konstruiert, auch wenn sie Abschnitte von Parallelkreisen sind; dadurch entsteht eine stereometrische Figur, an der nun nach den Sätzen der ebenen Geometrie aus den bekannten Stücken die unbekannten zu berechnen sind. Hierbei kann auch der Weg eingeschlagen werden — wie es Ptolemäus im *Planisphärium* macht —, die stereometrische Figur durch stereographische Projektion in eine Ebene zu legen. Bei den Indern war diese letzte Methode fast ausschließlich üblich, bei den Arabern sehr verbreitet. Eine zweite rechnerische Methode benutzt Seitenlehrsätze, wie sie zuerst von den Griechen aufgestellt wurden, die Methode II^a den Satz des Menelaos (seine *Sphärik* III. 1), die Methode II^b die Sätze III. 2 und 3. Alle Aufgaben seines *Almagestes* rechnet Ptolemäus nach II^a vor. Seinem Vorbild folgten die meisten Araber. Indessen hatten die zusammengesetzten Verhältnisse des Menelaosatzes III. 1 ihre Schwierigkeiten, und man benutzte seit Abū'l-wafa (940—998) einen Sonderfall von Men. III. 2 — die sog. „Regel der vier Größen“ — und den Satz III. 3, „Tangentensatz“ genannt. — Die dritte rechnerische Methode ist nun erst unsere sphärische Trigonometrie: sie zieht sich auf die Berechnung von Dreiecken zurück, für die ein für allemal festgelegte und sorgsam bewiesene „Formeln“ den Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln herstellen. Dieser wichtige Fortschritt trat mit dem Ende des ersten Jahrtausends n. Chr. ein. Die Aufstellung, den Beweis und die ständige Verwertung des allgemeinen sphärischen Sinussatzes schreibt Albiruni († 1048) seinem Lehrer Abū Nasr († zwischen 1010 und 1020) zu. — Verf. bringt zur Erläuterung seiner Darstellungen Übersetzung und moderne Umschrift eines Abschnittes aus dem *Analemma*, in dem Ptolemäus, nach dem ersten rechnerischen Verfahren vorgeht. Dann bringt er die Rechenvorschriften Tābits († 901) aus seinem Buche über die ebenen Sonnenuhren, denen die Beweise leider fehlen, und sucht aus den Rechnungen Schlüsse auf die Ableitungen zu machen: er stellt fest, daß die rechnerische Methode I zugrunde liegt. Als Quelle kann dem Tābit aber Ptolemäus nicht gedient haben, da keines der Fachwörter Ptolemäus' von Tābit gebraucht wird. Vielmehr scheint indischer Einfluß

vorzuliegen; Tābit benutzt hier die indische Sinusse, in einer anderen Schrift (Über die Transversalenfigur) aber die Sehnen. Gewissenhafte Überlegungen lassen auch erkennen, daß Tābit von dem allgemeinen Sinussatze, auch nicht einmal von dem besonderen Fall am rechtwinkligen Dreieck, eine Andeutung bringt. *Tropfke*.

Hayashi, Gorō: An extension of Malfatti's problem in the old Japanese mathematics. *Tōhoku Math. J.* 43, 127—132 (1937).

Langer, R. E.: René Descartes. *Amer. Math. Monthly* 44, 495—512 (1937).

Donder, Th. de, et J. Pelseneer: La vitesse de propagation de la lumière selon Descartes. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 23, 689—692 (1937).

On a coutume de souligner l'évidente incompatibilité de la propagation instantanée de la lumière, assumée par Descartes, et sa démonstration de la loi de la réfraction. Les auteurs montrent que Descartes, loin de commettre une contradiction si grossière, a devancé à la fois et la conception de la lumière comme une vibration d'un éther incompressible et la théorie corpusculaire. Il écrit «lumière» (avec une minuscule) lorsqu'il admet la première supposition et «Lumière» (avec une majuscule) lorsqu'il pense à un transport de particules. Il faut en le lisant tenir compte de cette distinction.

Dijksterhuis (Oisterwijk, Holl.).

Jelitai, J.: Leben und Werke des ungarischen Mathematikers Ladislaus Chernac (1740—1816). Sonderdruck aus: *Debreceni Szemle* H. 7/8, 7 S. u. dtsch. Zusammenfassung (1937).

Szénassy, Barna v.: Wolfgang Bolyais infinitesimalische Gedanken. *Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen* H. 13, 1—30 u. dtsch. Zusammenfassung 31—34 (1937) [Ungarisch].

Sergescu, P.: Le développement des sciences mathématiques en Roumanie. *La vie scient. Roumanie*, I. Sci. pures 63 pag. (1937).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Kobrzyński, Z.: La théorie des déterminants logiques. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 30, 75—82 (1937).

$\sum a_i$ bzw. $\prod a_i$ bedeute die logische Summe bzw. das logische Produkt der Aussagen a_i . Ist $(a_{i,k})$ eine quadratische Matrix, so wird die logische Summe über alle möglichen Produkte $\prod_i a_{i,s_i}$, wobei s_1, \dots, s_n eine Permutation von $1, \dots, n$ bildet, als Determinante 1. Art bezeichnet. Vertauschung von Summe und Produkt ergibt dual die Determinante 2. Art. In Analogie zur Algebra werden Entwicklungssätze, Multiplikationssätze usw. abgeleitet.

G. Köthe (Münster).

Parker, W. V.: On symmetric determinants. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 730—732 (1937).

Some theorems on the vanishing of symmetric determinants, under the assumption that all principal minors of a certain order are zero. For a previous similar result cf. *Zbl.* 4, 196.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Parker, W. V.: The characteristic roots of a matrix. *Duke math. J.* 3, 484—487 (1937).

Mit Benutzung geläufiger Überlegungen aus der Theorie quadratischer Formen werden weitere Abschätzungen für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer Matrix hergeleitet.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Ostrowski, Alexander: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. *Comment. math. helv.* 10, 69—96 (1937).

Verf. führt eine frühere Arbeit (dies. *Zbl.* 16, 3) fort. Schon Hadamard hatte gelegentlich gewisse Determinanten H betrachtet, bei denen die n Größen

$2|\eta_{ii}| - \sum_{k=1}^n |\eta_{ik}| \geq 0$ sind, bei denen also die Diagonalelemente gewissermaßen überwiegen. Durch Multiplikation der Zeilen und Spalten einer „Hadamardschen“ Determinante geht diese über in eine vom Verf. sog. „ H -Determinante“, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn in ihr h_{ii} durch $|h_{ii}|$ und h_{ik} durch $-|h_{ik}|$ ersetzt wird, man eine „ M -Determinante“ erhält, die mit allen Minoren ≥ 0 ist. — Es werden nun im wesentlichen folgende Sätze bewiesen: 1. $|H| \geq M$. Bei reellen h_{ik} ist zudem $\operatorname{sgn} H = \operatorname{sgn}(h_{11} h_{22} \dots h_{nn})$. 2. $H = |\eta_{ik}|$ sei eine Hadamardsche Determinante, bei der die η_{ii} zu 1 gemacht sind. Dann gelten die nicht mehr verbesserungsfähigen Abschätzungen: $\prod_{i=1}^m (1 - s_{2i-1} s_{2i}) \leq |H| \leq \prod_{i=1}^m (1 + s_{2i-1} s_{2i})$ und bei reellen η_{ik} : $\prod_{i=1}^m (1 - s_{2i-1} s_{2i}) \leq |H| \leq \prod_{i=1}^m (1 - s_1 s_2 \dots s_n)$. Hier ist $n =$ Ordnung von H , $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $s_i = -1 + \sum_{k=1}^n |\eta_{ik}|$ und $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$, $s_1 s_2 < 1$. Frühere Abschätzungen von Koch und vom Verf. selbst (vgl. dies. Zbl. 16, 3) sind nur einseitig (nach unten) und zugleich weniger scharf.

Bodewig (Basel).

Péyovitch, T.: Contribution à l'étude de la valeur maximum du module d'un déterminant. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 349–353 (1937).

En se basant sur la démonstration de Boggio [Bull. Sci. math., II. s. 35, 113 (1911)] du théorème classique de Hadamard l'auteur donne une inégalité pour le module d'un déterminant, en utilisant des nombres auxiliaires introduits par Boggio.

N. Obrechhoff (Sofia).

Albeggiani, M. L.: Risoluzione di una questione relativa ai determinanti. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 73–89 (1936).

Dans un travail [Giorn. Mat. Battaglini 13 (1875)] l'auteur a donné une formule pour le développement d'un déterminant dont les éléments sont des sommes de p nombres. En se basant sur sa formule il expose une démonstration nouvelle du théorème classique d'Hadamard pour le module d'un déterminant en l'élargissant dans le sens suivant: Soit $D_m^{(n)} = \|a_{rs}\|$, $r = 1, 2, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, m$; $m \geq n$, une matrice de nombres complexes a_{rs} . Désignons par $\bar{D}_m^{(n)}$ la matrice $\|\bar{a}_{rs}\|$, où \bar{a}_{rs} est le nombre conjugué de a_{rs} et par Δ_n le déterminant $D_m^{(n)} \bar{D}_m^{(n)}$, en faisant la multiplication par des lignes horizontales. Alors on a $\Delta_n \leq \prod_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m |a_{rs}|^2 \right)$. Ensuite il étudie les cas où le signe d'égalité a lieu.

N. Obrechhoff (Sofia).

Lo Voi, Antonino: Le matrici di Riemann. I. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 233–279 (1936).

Die Arbeit enthält eine ausführliche Darstellung der Theorie der Riemannmatrizen. Von der Theorie der Algebren wird kein Gebrauch gemacht, und die Betrachtungen aus der linearen Algebra sind in geometrische Form gekleidet. § 1 enthält die Definition der Riemannmatrizen, die Begriffe Hauptmatrix und Multiplikator, Multiplikabilitätsindex h (= Rang der Multiplikatoralgebra minus 1), Isomorphismus und Äquivalenz (ganzzahliger Isomorphismus). In § 2 wird der Begriff der reinen Riemannmatrix eingeführt (d. h. die Multiplikatoralgebra ist nullteilerfrei) und der Poincarésche Satz von der vollständigen Reduzibilität der Riemannmatrizen auf reine bewiesen. Dann werden die symmetrischen (unter dem Rosatischen Anitautomorphismus invarianten) Multiplikatoren und die antisymmetrischen (ihr Vorzeichen umkehrenden) betrachtet. Der um 1 verminderte Rang der Algebra der symmetrischen Multiplikatoren ist der Singularitätsindex k . Allerdings wird die Formulierung mittels des Anitautomorphismus nicht gebraucht. Die Nullteilerfreiheit der Multiplikatoralgebra einer reinen Riemannmatrix erscheint in der Fassung, daß die Minimalgleichung eines Multiplikators irreduzibel sein muß. § 3 befaßt sich mit Spezialfällen. Als Hilfsmittel erscheint die Reduktion von Bagnera und de Franchis, die darin besteht, die Riemann-

matrix ω in Beziehung auf einen gegebenen Multiplikator α so zu normieren, daß die linke darstellende Matrix α Diagonalform, die rechte (rationale) dagegen die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ -a_n E, & -a_{n-1} E, & -a_{n-2} E, & \dots & -a_2 E & -a_1 E \end{pmatrix}$$

annimmt, dabei ist $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$ die Minimalgleichung von α und E die Einsmatrix von $2p/n$ Zeilen (p das Geschlecht von ω). Es werden die Fälle $k=0$ (Multiplikatoralgebra eine Quaternionenalgebra oder ein quadratischer Körper) untersucht, insbesondere wird der Existenzbeweis für den zweiten Fall bei beliebigem Geschlecht geliefert. Alle Ergebnisse waren bekannt, der Verf. bezweckt eine zusammenfassende Darstellung. Deuring (Jena).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

● **Albert, A. Adrian:** *Modern higher algebra*. Chicago: Univ. of Chicago press 1937. XIV, 319 pag. bound \$ 4.—

Das Buch behandelt in 12 Kapiteln: Gruppen und Ringe, Ringe mit Einselement, Matrizen, Ähnlichkeit quadratischer Matrizen, symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen, endliche Gruppen, Erweiterungskörper, Galoissche Theorie, zyklische Körper, Matrixalgebren, transzendente Körpertheorie, Bewertungen. — Es soll vornehmlich eine Einführung in die allgemeinen algebraischen Grundlagen sein, die für die Theorie der Algebren gebraucht werden. Diese Grundlagen werden von dem allgemein-begrifflichen Standpunkt der modernen Algebra aus dargeboten. Die eigentliche Theorie der Algebren wird nicht gebracht. Jedoch werden die wesentlichen in sie eingehenden Begriffsbildungen in der konkreten Sprache der Matrizen entwickelt. Im Mittelpunkt steht eine ausführliche Theorie der Matrizen. Die Galoissche Theorie wird in moderner Gestalt, als Theorie der Automorphismengruppen algebraischer Erweiterungskörper gebracht. Den Abschluß bildet eine ausführliche Grundlegung der Theorie der bewerteten Körper, die in die Einführung der p -adischen und p -adischen Zahlkörper mündet. Dem Text sind zahlreiche zur Illustration dienende Übungsaufgaben beigegeben. Hasse (Göttingen).

Fitting, Hans: *Bemerkungen über den Endomorphismenbereich einer Gruppe*. Math. Ann. 115, 75—79 (1937).

Die normalen Endomorphismen einer Gruppe bilden nach den früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 5, 386 u. 15, 393) einen ringartigen Bereich \mathfrak{A} , in dem aber die Addition nicht unbeschränkt ausführbar ist. Erweitert man diesen Bereich durch Hinzunahme von Summen von Endomorphismen — diese sind eindeutige Abbildungen der Gruppe in sich, aber i. a. keine Endomorphismen mehr —, so wird der Bereich \mathfrak{A} zu einem Ring \mathfrak{R} erweitert. In \mathfrak{R} ist ein zweiseitiges Ideal \mathfrak{Q} sowie eine gewisse Menge von Restklassen mod \mathfrak{Q} ausgezeichnet, deren Vereinigungsmenge der Bereich \mathfrak{A} ist. Aus jedem Ring, in welchem ein Ideal und eine Menge von Restklassen mit bestimmten Eigenschaften ausgezeichnet ist, kann man nach demselben Verfahren einen Bereich (mit eingeschränkter Addition) bilden. van der Waerden (Leipzig).

Jacobson, Nathan: *Abstract derivation and Lie algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 206—224 (1937).

The author considers an arbitrary algebra R of finite order over a field F , abstract derivations of R , the derivation algebra D of linear transformations in R . This algebra is a restricted Lie algebra. After obtaining some elementary fundamental properties of derivations he considers the case where R is associative and studies connections between reducibility, semi-simplicity, simplicity of R and the corresponding concepts for D . He shows that when R is normal simple all of its derivations are

inner. Moreover in this case D is simple unless the characteristic of F divides the degree of R over F . The paper closes with a consideration of the extreme case where R is a pure inseparable extension of exponent one over F of characteristic p . *Albert*.

Jacobson, Nathan: p -Algebras of exponent p . Bull. Amer. Math. Soc. 43, 667–670 (1937).

A sei eine einfache normale Algebra über F mit dem maximalen kommutativen Teilkörper $C = F(c_1, \dots, c_m)$, $c_i^p = \gamma_i \in F$. $x \rightarrow xD$ sei eine Differentiation in C mit $zD = 0 \Leftrightarrow z \in F$, so daß $x(D^{p^m} + D^{p^{m-1}}\tau_1 + \dots + D\tau_m) = 0$ mit gewissen $\tau_i \in F$ für alle $x \in C$ ist (vgl. vorstehend. Referat). Es gibt ein d in A mit $xd - dx = xD$ für $x \in C$. $\sigma = d^{p^m} + d^{p^{m-1}}\tau_1 + \dots + d\tau_m$ liegt in F , und da dies die Minimalgleichung für d in C ist, so wird A von C und d erzeugt. A ist also durch C , diese Minimalgleichung und die Differentiation D , welche die Kommutatoren $xd - dx$ festlegt, gegeben. Für $A \sim 1$ ist notwendig und hinreichend, daß $\delta = V(x_0)$, $x_0 \in C$ ist, wo $V(x) = V_{p^m}(x) + V_{p^{m-1}}(x)\tau_1 + \dots + V_1(x)\tau_m$, $V_{p^j}(x) = x^{p^j} + (x^{p^{j-1}})^{p^{j-1}} + \dots + x^{(p^{j-1})}$ gesetzt wird. Dem Normenaustauschsatz (Deuring, dies. Zbl. 3, 337) entsprechend gilt: Sind γ und δ keine p -te Potenzen in F , so ist $\delta = (\xi_0^p - \xi_{p-1}^p) + \gamma\xi_1^p + \dots + \gamma^{p-1}\xi_{p-1}^p$ dann und nur dann mit $\xi_i \in F$ lösbar, wenn $\gamma = (\eta_0^p - \eta_{p-1}^p) + \delta\eta_1^p + \dots + \delta^{p-1}\eta_{p-1}^p$ mit $\eta_i \in F$ lösbar ist.

Deuring (Jena).

Jacobson, N.: A note on topological fields. Amer. J. Math. 59, 889–894 (1937).

The automorphisms and anti-automorphisms of a p -adic field or of a z -adic field (i.e. the field of power series in an indeterminate z with coefficients in a finite field) are investigated by topological methods. From an earlier paper of the author (this Zbl. 14, 81) it follows that the theory of such fields is equivalent to that of locally compact separable totally disconnected (l. c. s. t. d.) topological fields. Let F be a l. c. s. t. d. field and $\alpha \rightarrow \alpha^S$ an automorphism or anti-automorphism in F , then S is continuous (for commutative F this was proved by F. K. Schmidt, Math. Ann. 108; this Zbl. 6, 150). If S is an anti-automorphism (it is not assumed that S leaves the elements of the centrum C invariant!) the degree of F with respect to its centrum C is 1 or 2, i.e. either $F = C$ or F is a quaternion algebra with respect to C . If F has characteristic $p \neq 2$ and S^2 is the identity in F , but S is not the identity in C , then $F = C$, and C is quadratic with respect to the field C_0 of invariant elements. These results are extended to matrix algebras with coefficients in F . *Taussky (London).*

Gleizal, André: Transfinite real numbers. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 581–587 (1937).

Ankündigung einer Fortführung der Artin-Schreierschen Theorie der reellen Körper. A sei ein geordneter Körper (d. h. die Elemente von A seien so linear geordnet, daß für jedes $\alpha \neq 0$ entweder $\alpha < 0 < -\alpha$ oder $-\alpha < 0 < \alpha$ ist und aus $\alpha > 0$, $\beta > 0$ stets $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ folgt). Ist $\alpha \neq 0$, so ist eines der vier Elemente α , $-\alpha$, α^{-1} , $-\alpha^{-1}$ größer oder gleich 1. Es werde mit α' bezeichnet. Zwei Elemente α , $\beta \neq 0$ aus A heißen relativ archimedisch zueinander, wenn für α' und β' gilt, daß jedes einem geeigneten ganzen Vielfachen oder ganzen Potenz des anderen vorangeht. Ist B ein geordneter Körper, A ein geordneter Teilkörper, so heißt B reelle Erweiterung von A . B heißt archimedische Erweiterung von A , wenn zu jedem β aus B ein α aus A existiert, so daß β zu α relativ archimedisch ist. Es gibt im allgemeinen algebraische und transzendente archimedische Erweiterungen eines geordneten Körpers. Ein geordneter Körper, der sich nicht archimedisch erweitern läßt, heiße archimedisch abgeschlossen. Eine Menge von Elementen β des geordneten Körpers A heiße eine Basisordnung L von A , wenn keine zwei Elemente von L relativ archimedisch zueinander sind und wenn jedes Element von A relativ zu einem Element von L archimedisch ist. Ist L die Nullmenge, so ist A ein Teilkörper des Körpers der reellen Zahlen. L ist bis auf Ordnungsisomorphie in A eindeutig bestimmt. Als transfinite ganze Zahlen von A werden die Elemente $\sum_{i=1}^j m_i \prod_{k=1}^{i_i} \beta_{ik}^{n_{ik}}$ bezeichnet, m_i , n_{ik} ganze Zahlen, β_{ik} Elemente aus L . Der Quotient zweier transfiniter, ganzer Zahlen heißt

transfinit rational. Der aus allen transfiniten rationalen Zahlen gebildete Teilkörper R von A ist der kleinste geordnete Körper mit der Basisordnung L , und jeder geordnete Körper der Basisordnung L enthält einen zu R isomorphen Teilkörper. Es gibt stets auch einen maximalen geordneten Körper F mit der Basisordnung L , der zu jedem Körper mit der Basisordnung L einen isomorphen Teilkörper enthält. F ist reell algebraisch abgeschlossen und archimedisch abgeschlossen. Die Konstruktion von F zu der beliebig vorgegebenen linear geordneten Menge L verläuft so: Die Elemente von F haben die Gestalt $\sigma = \sum_{\mu < \alpha} a_{\mu} \prod_{\lambda < \lambda_{\mu}} \beta_{\mu\lambda}^{b_{\mu\lambda}}$. Dabei sind die a_{μ} und $b_{\mu\lambda}$ reelle Zahlen, λ durchläuft alle

Ordnungszahlen $< \lambda_{\mu}$, die $\beta_{\mu\lambda}$ sind absteigend geordnet im Sinne von L , d. h. $\beta_{\mu_1} > \beta_{\mu_2} > \dots > \beta_{\omega} > \dots$, μ durchläuft alle Ordnungszahlen $< \alpha$, und auch die Produkte $\prod_{\lambda} \beta_{\mu\lambda}^{b_{\mu\lambda}}$ müssen absteigend geordnet sein. Dabei ist $\prod \beta_{\lambda}^{a_{\lambda}} < \prod \beta_{\lambda}^{b_{\lambda}}$, wenn die erste von Null verschiedene Differenz $b_{\lambda} - a_{\lambda}$ positiv ist. Die Rechenoperationen in F vollziehen sich analog denen für unendliche Dezimalbrüche, weshalb die Elemente σ von F als transfinite reelle Zahlen bezeichnet werden. $F(i)$ ist algebraisch abgeschlossen, und jeder Körper der Charakteristik Null von nicht höherer Kardinalzahl als $F(i)$ ist einem Teilkörper von $F(i)$ isomorph. *G. Köthe (Münster i. W.).*

Tannaka, Tadao: Über die Konstruktion der galoisschen Körper mit vorgegebener p -Gruppe. *Tôhoku Math. J.* 43, 252—260 (1937).

Verf. beweist den folgenden bereits von A. Scholz (dies. Zbl. 16, 6) und H. Reichardt (dies. Zbl. 16, 151) sogar für beliebige Grundkörper, aber unter der Voraussetzung $p \neq 2$, bewiesenen Satz: Wenn der Grundkörper k die p -te Einheitswurzel enthält, so gibt es über k unendlich viele Erweiterungskörper mit einer beliebig vorgegebenen p -Gruppe als Galoisgruppe. [S. auch T. Tannaka, *Proc. Imp. Acad. Jap.* 12 (1936); dies. Zbl. 15, 195]. *Taussky (London).*

Chabauty, Claude: Sur les unités d'un corps de nombres algébriques, qui sont soumises à des conditions algébriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 944—946 (1937).

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n und Einheitenrang r , p eine Primzahl, H die algebraisch-abgeschlossene Hülle des rational- p -adischen Zahlkörpers, V eine algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension s , definiert durch algebraische Gleichungen über H zwischen den n Konjugierten in H der allgemeinen Zahl aus K , und E die Menge der Einheiten aus K , die zu V gehören. Es wird angenommen, daß E unendlich ist. Eine Einheitsgruppe γ in K vom Rang ρ heißt minimal in bezug auf E und eine Einheitenklasse c nach γ , wenn c eine unendliche Menge E' von Elementen aus E enthält, aber keine Einheitsgruppe von kleinerem Rang als ρ in K existiert, die unendlich viele Elemente aus E' enthält. γ heißt konvergent, wenn es eine Basis $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\rho}$ von γ derart gibt, daß die p -adischen Exponentialfunktionen ε_i^x und ihre Konjugierten für alle ganzen y_i aus H konvergieren. Es gilt folgender Satz: Ist E unendlich, γ konvergent und minimal in bezug auf E und c , so gibt es eine Mannigfaltigkeit V^* von gleicher Art wie V der Dimension $s^* \leq s + r - 1$, die c enthält. Daraus folgt: Hat K die symmetrische Gruppe oder Primzahlgrad, so gibt es für $s \leq n - r - 1$ in V höchstens endlich viele Einheiten. Insbesondere gibt es dann in einem Teilmodul von K vom Rang $\leq n - r$ höchstens endlich viele Einheiten. *Hasse.*

Schilling, O. E. G.: Arithmetic in fields of formal power series in several variables. *Ann. of Math., II.* s. 38, 551—576 (1937).

Es werden Körper untersucht, die mit der lexikographisch geordneten additiven Gruppe aller m -Tupel von ganzen Zahlen bewertet sind: m -rangig diskret bewertete Körper [vgl. auch Krull, Allgemeine Bewertungstheorie; *J. reine angew. Math.* 167, 160—196 (1932); dies. Zbl. 4, 98]. Eine treue, die Ordnung erhaltende Abbildung der Wertgruppe auf eine Untergruppe heißt Meromorphismus, bei Benutzung einer festen Basis wird ein Meromorphismus durch eine dreieckige Matrix gegeben, deren Diagonalelemente von der Wahl der Basis nicht abhängen. Die Determinante dieser

Matrix heißt die Norm des Meromorphismus. Meromorphismen, die sich nur um Automorphismen unterscheiden, bilden eine Klasse, deren Elemente gleiche Normen haben. In Verallgemeinerung eines Resultates von F. K. Schmidt wird gezeigt: Ein für die m -rangige Bewertung V maximal perfekter, nicht algebraisch abgeschlossener Körper ist nur für V maximal perfekt. Wird vorausgesetzt, daß der bewertete Körper K die gleiche Charakteristik hat wie der Restklassenkörper K' , so gilt: Ist K m -rangig diskret maximal perfekt bewertet, so ist K dem Körper aller Potenzreihen in m Unbestimmten t_i mit Koeffizienten aus K' isomorph. K sei für die m -rangige Bewertung V perfekt und habe die gleiche Char. wie der Restklassenkörper K' . $\Gamma(K)$ sei die Wertgruppe von V . Eine endliche algebraische Erweiterung L von K hat bekanntlich genau eine V fortsetzende Bewertung, deren Wertgruppe $\Gamma(L)$ die Gruppe $\Gamma(K)$ umfaßt. Die Klasse aller $\Gamma(L)$ auf $\Gamma(K)$ abbildenden Meromorphismen E von $\Gamma(L)$ heißt die Verzweigungsklasse von L/K . Normklasse von L/K heißt die Klasse aller Meromorphismen Φ von $\Gamma(K)$ auf die Untergruppe $(L:K)\Gamma(K)$. Ist $(L:K) = n$, so ist $\text{Norm}(cl(E)) \cdot \text{Norm}(cl(\Phi)) = n^m$. Es wird jetzt angenommen, daß K' ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 ist. Dann ist L/K abelsch mit zu $\Gamma(L)/\Gamma(K)$ isomorpher Galoisgruppe. Der Homomorphismus von $K = K(m)$ auf $K' = K(0)$ kann in m Stufen $K(m) \rightarrow K(m-1) \rightarrow \dots \rightarrow K(m-i) \rightarrow \dots \rightarrow K(0)$ zerlegt werden, entsprechend $L = L(m) \rightarrow L(m-1) \rightarrow \dots \rightarrow L(0) = K'$. Die Diagonalelemente e_m, e_{m-1}, \dots, e_1 eines Meromorphismus der Verzweigungsklasse sind dann die gewöhnlichen Verzweigungsordnungen von $L(i)/K(i)$, die ja zu Bewertungen der Stufe 1 gehören. Die Erweiterungen L n -ten Grades von K entsprechen umkehrbar eindeutig den verschiedenen geordneten Untergruppen von $\Gamma(K)/n$, in denen $\Gamma(K)$ den Index n hat. Die Normklassengruppe eines zyklischen L n -ten Grades hat die Ordnung n^{m-1} . Für abelsche Körper gilt: Jeder Untergruppe N der multiplikativen Gruppe K^* , deren Index die $(m-1)$ -te Potenz einer ganzen Zahl n ist, entspricht genau ein über K abelscher Körper L , dessen Normgruppe in K gerade N ist und umgekehrt; die Galoisgruppe von L/K ist dabei zu K^*/N isomorph. Für $m=2$ gilt im wesentlichen die Klassenkörpertheorie im kleinen, für $m>2$ nicht. Die Theorie der einfachen normalen Algebren über K schließt sich an die Sätze über Normklassengruppen in ähnlicher Weise an wie die Theorie der p -adischen Algebren an die lokale Klassenkörpertheorie. An zwei Beispielen für $m=3$ und $m=4$ werden Abweichungen von der gewöhnlichen p -adischen Theorie gezeigt; Algebren mit verschiedenen Typen von unverzweigten abelschen Zerfällungskörpern, solche mit vom Grad verschiedenem Exponenten, zyklische Algebren, deren Grad und Index gleich p^2 sind, während der Restklassengrad p^3 und der Verzweigungsexponent p ist.

Deuring (Jena).

Schmidt, F. K.: Berichtigung zu der Arbeit: Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. J. reine angew. Math. 178, 128 (1937).

Irrtümer über Binomialkoeffizienten, die für die Ergebnisse gänzlich belanglos sind (vgl. dies. Zbl. 17, 101), werden berichtigt.

Deuring (Jena).

Zahlentheorie:

Schots H.: Deux problèmes intéressants. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 816—820 (1937).

Ein magisches Quadrat von 16 und eins von 25 Feldern. N. G. W. H. Beeger.

Niewiadomski, R.: Sur la grandeur absolue et relation mutuelle des nombres entiers qui peuvent résoudre l'équation $x^p + y^p = z^p$. Wiadom. mat. 54, 113—127 (1938) [Polnisch].

Es seien x, y, z, d natürliche Zahlen, für die (1) $x^p + y^p = z^p$, $x + y = z + d$ p -prim. Verf. beweist die Abschätzungen:

$$1 < \frac{xy}{zd} < \frac{p^2}{p^3 - 1}, \quad \sqrt[p]{\frac{y}{p(z-y)}} > \frac{y}{x} > \sqrt[p]{\frac{p(z-x)}{x}}. \quad (2)$$

Ferner beweist Verf. mit einfachen Mitteln (die bekannte Tatsache), daß x, y, z in (1) keine Primzahlpotenzen sein können. Mittels der Ungleichungen (2), einer graphischen Darstellung der Kurve $\left(\frac{x}{z}\right)^p + \left(\frac{y}{p}\right)^p = 1$ und zahlreichen numerischen Beispielen zeigt Verf., daß schon für kleine p die Zahlen x, y, z in (1) verhältnismäßig sehr groß sein müssen.

Lubelski (Warschau).

Stamirewska, Anna: Sur un théorème d'Ernesto Cesaro. Wiadom. mat. 54, 129—132 (1938) [Polnisch].

n sei eine ungerade perfekte Zahl, k die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n , $d > 1$ der kleinste Primteiler von n . Cesaro hat gezeigt, daß $d \leq k\sqrt{2}$ ist, Verf. dagegen zeigt, daß sogar $d \leq k$ ist.

Lubelski (Warschau).

Amante, Salvatore: Sulle funzioni analitiche numerico-integrali. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 373—378 (1936).

L'au. généralise un théorème de Cipolla [Rev. Math. 9 (1909)] relativement les fonctions numériques-intégrales d'une fonction numérique donnée, introduites par Cipolla.

N. Obrechhoff (Sofia).

Whiteman, Albert: On a theorem of higher reciprocity. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 567—572 (1937).

Sind M und N primäre Polynome ohne gemeinsamen Teiler aus dem Polynom-bereich über einem Galoisfeld $GF(p^\pi)$ resp. vom Grade m und n , so wird das Reziprozitätsgesetz $\frac{\{M\}}{\{N\}} = (-1)^{mn} \frac{\{N\}}{\{M\}}$ bewiesen. Es ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Kuhne (J. f. Math. 124, 121; vgl. auch L. Carlitz, dies. Zbl. 3, 195). Gilt im Bereiche die Zerlegung in irreduzible Polynome P_i ; $M = P_1^{a_1} \dots P_k^{a_k}$, so wird $\frac{\{N\}}{\{M\}}$ definiert durch $\frac{\{N\}}{\{M\}} = \frac{\{N\}}{\{P_1\}^{a_1}} \dots \frac{\{N\}}{\{P_k\}^{a_k}}$ und $\frac{\{N\}}{\{P_i\}} = N^{(p^{\pi v} - 1)(p^\pi - 1)} \pmod{P_i}$, wenn v der Grad von P_i ist. Der Beweis wird unabhängig vom Kuhneschen Satz mit Hilfe des Analogons (für den Polynom-bereich) des Gaußschen Lemmas aus der Theorie der quadratischen Reste geführt.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Beurling, Arne: Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. I. Acta math. 68, 255—291 (1937).

Two non-decreasing functions $N(x)$ and $\Pi(x)$ are connected, through a function $\zeta(s)$, by the relations

$$\zeta(s) = 1 + \int_1^\infty x^{-s} dN(x), \quad \log \zeta(s) = \int_1^\infty x^{-s} d\Pi(x) \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1),$$

and the question how far the asymptotic behaviour of $\Pi(x)$ (when $x \rightarrow \infty$) can be inferred from that of $N(x)$ is discussed on the general assumption that $\log N(x) \sim \log x$. [In the theory of primes, $N(x) = [x]$, $\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \dots$, and $\zeta(s)$ is the Riemann zeta-function.] The basic theorems are "Tauberian" inferences from $\log \zeta(s)$ to $\Pi(x)$ of a type introduced by Wiener and developed by Heilbronn and Landau, but the conditions on $\log \zeta(s)$ are considerably generalised. $\zeta(s)$ is said to satisfy condition (A_λ) if, when $\sigma \rightarrow 1 + 0$, the harmonic function $-\arg \zeta(\sigma + it)$ tends boundedly to a limit $v(t)$ of bounded variation in $-\lambda \leq t \leq \lambda$. A point $1 + it$ ($-\lambda < t < \lambda$) is then called a "pole" (or "zero") of order α of $\zeta(s)$ if $v(t+0) - v(t-0) = \pi\alpha$ (or $-\pi\alpha$), where α is a positive real number. A typical special result is that, if (A_λ) is satisfied for every $\lambda > 0$, and if $v(t)$ is absolutely continuous except for discontinuities arising from a "pole" of order ρ at $s=1$ and (possibly) "zeros" of orders $\alpha(t_v)$ at $1 \pm it_v$ ($0 < t_1 < t_2 < \dots$), then

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \left(\rho - 2 \sum_v \frac{\alpha(t_v)}{\sqrt{1+t_v^2}} \cos(t_v \log x - \theta_v) \right) \quad \left(\tan \theta_v = t_v, 0 < \theta_v < \frac{\pi}{2} \right); \quad (1)$$

but the general theory covers cases where the "zeros" need not form a discrete set, and where $v(t)$ may involve a "singular" component (a non-constant continuous function hav-

ing a zero derivative almost everywhere). The Σ in (1), if an infinite series, is absolutely convergent in virtue of the theorem that the sum of the orders of the "zeros" cannot exceed the sum of the orders of the "poles", so that $2\Sigma\alpha(t_v) \leq \rho$. This theorem, which plays a fundamental part, is a generalisation of the theorem that Riemann's $\zeta(s)$ has no zero on $\sigma=1$. The above theorems taken in conjunction with simple "Abelian" inferences from $N(x)$ to $\zeta(s)$ lead to inferences from $N(x)$ to $\Pi(x)$ in which $\zeta(s)$ no longer appears explicitly. Thus, if $N(x) = A_\rho(x) + R(x)$, where $A_\rho(x)$ is a finite sum of terms $Ax \log^\mu x$ in which the greatest μ is $\rho-1$, then, in the case $1 \leq \rho < 2$, the relation $\Pi(x) \sim \rho x / \log x$ is implied by $R(x) = O(x/\log^\gamma x)$ if $\gamma > 1 + \frac{1}{2}\rho$ but not if $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\rho$; but, in the case $\rho \geq 2$ such a relation is not implied even by $R(x) = O(1)$. It is stated that the result for $1 \leq \rho < 2$ holds also for $0 < \rho < 1$, but that the proof is more difficult.

Ingham (Cambridge).

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: Groups which contain a Hamiltonian subgroup of odd prime index. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **23**, 587—589 (1937).

Die im Titel genannten Gruppen lassen sich in das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe der Ordnung $8p$ zerlegen, wobei p eine ungerade Primzahl ist, falls die Hamiltonsche Gruppe nicht Normalteiler ist. Magnus.

Gruner, Walter: Reguläre Permutationen und ihre Beziehungen zur Topologie. Comment. math. helv. **10**, 42—68 (1937).

Es werden zunächst einige z. T. bekannte Beziehungen zwischen den Begriffen uniform, regulär, transitiv abgeleitet. Eine Gruppe von Substitutionen heißt uniform, regulär oder transitiv, je nachdem ob jede Variable in jede andere durch höchstens eine, genau eine oder mindestens eine Substitution der Gruppe übergeführt werden kann. Bezeichnet $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Gruppe aller Substitutionen, die mit jeder Substitution der Gruppe \mathfrak{H} vertauschbar sind, so gilt: Dann und nur dann ist \mathfrak{H} uniform, wenn $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv ist. Ferner besteht die Dualität: Ist \mathfrak{H} uniform, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv; ist \mathfrak{H} transitiv, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ uniform. Die Beziehung zwischen den Substitutionsgruppen \mathfrak{H} und $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ ist dieselbe wie die zwischen der Monodromiegruppe und der Deckbewegungsgruppe bei Überlagerungskomplexen. H. Seifert (Heidelberg).

Lewis, F. A.: Proof of the non-isomorphism of two collineation groups of order 5184. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 742—744 (1937).

Es wird bewiesen, daß eine gewisse Kollineationsgruppe der Ordnung 5184 nicht isomorph ist mit einer Gruppe von Musselman [Amer. J. Math. **49** (1927)], indem gezeigt wird, daß die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 eine verschiedene in den beiden Gruppen ist. Burckhardt (Zürich).

Murnaghan, F. D.: On the direct product of irreducible representations of the symmetric group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **23**, 488—490 (1937).

Es sei \mathfrak{S}_n die symmetrische Permutationsgruppe in n Symbolen. Verf. hat in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **17**, 155) aus einer irreduziblen Darstellung von \mathfrak{S}_n und einer irreduziblen Darstellung von \mathfrak{S}_m mit Hilfe direkter Produktbildung eine Darstellung von \mathfrak{S}_{n+m} gebildet und diese in irreduzible Bestandteile zerlegt. Hier gibt er eine Verbesserung der Methode, die bei Behandlung konkreter Fälle rechnerisch sehr viel schneller zum Ziel führt.

R. Brauer (Toronto).

Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math., II. s. **38**, 533—550 (1937).

Die von Frobenius, Burnside und Brauer in Sonderfällen erhaltenen Sätze über die Ausreduktion der Darstellung eines Normalteilers \mathfrak{H} , die von einer irreduziblen Darstellung einer Gruppe \mathfrak{G} induziert wird, sind vom Verf. zusammenhängend und in möglichster Allgemeinheit dargestellt. — Zwei Darstellungen $u \rightarrow \Gamma(u)$ und $u \rightarrow \Delta(u)$ von \mathfrak{H} in Matrizen f -ten Grades mit Koeffizienten aus beliebigem Grund-

körper k heißen konjugiert unter \mathfrak{G} , wenn es ein festes Element s aus \mathfrak{G} gibt, so daß die Darstellungen Δ und $u \rightarrow \Gamma(sus^{-1})$ von \mathfrak{H} äquivalent sind. — Eine irreduzible Darstellung D n -ten Grades von \mathfrak{G} induziert eine voll reduzible Darstellung Γ von \mathfrak{H} , deren irreduzible Komponenten alle in gleicher Vielfachheit vorkommen und eine Schar von unter \mathfrak{G} konjugierten Darstellungen $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(m)}$ vom gleichen Grade f bilden. — Ein zu D gehöriger Darstellungsmodul \mathfrak{R} läßt sich als direkte Summe $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_m$ von Systemen der Imprimitivität unter \mathfrak{G} schreiben, wobei \mathfrak{R}_i unter \mathfrak{H} invariant ist und die Darstellung $l \cdot \Gamma^{(i)}$ vermittelt. Die Untergruppe \mathfrak{G}_1 aller Elemente aus \mathfrak{G} , die \mathfrak{R}_1 auf sich abbilden, hat den Index m unter \mathfrak{G} , und \mathfrak{R}_1 vermittelt eine irreduzible Darstellung D' von \mathfrak{G}_1 , so daß D die von D' erzeugte Darstellung von \mathfrak{G} ist. — Falls der Koeffizientenkörper k algebraisch abgeschlossen ist, dann ist D' äquivalent dem Produkt einer irreduziblen projektiven Darstellung Δ vom Grade f mit einer irr. proj. Darst. Λ vom Grade l , wobei die Faktorsysteme zueinander invers sind. Δ ist definiert durch $\Gamma(sus^{-1}) = \Delta(s) \Gamma(u) \Delta(s)^{-1}$ für alle s aus \mathfrak{G}_1 , u aus \mathfrak{H} . Bei geeigneter Normierung ist Δ schon irr. proj. Darst. von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. — Eine irreduzible Darstellung $\Gamma^{(1)}$ von \mathfrak{H} kann bei alg. abgeschl. Grundkörper genau dann in eine irr. Darst. von \mathfrak{G} eingebettet werden, wenn die Untergruppe \mathfrak{G}_1 aller Elemente aus \mathfrak{G} , die $\Gamma^{(1)}$ auf eine zu $\Gamma^{(1)}$ äquivalente Darstellung von \mathfrak{H} transformieren, endlichen Index hat, und wenn sich $\Gamma^{(1)}$ in eine irr. Darst. von \mathfrak{G}_1 einbetten läßt. Letzteres ist genau dann möglich, wenn die Algebra mit den Basiselementen $w_S (S \in \mathfrak{G}_1/\mathfrak{H})$ und der Kompositionsregel $w_S w_T = \alpha_{S,T}^{-1} w_{ST}$ Darstellungen endlichen Grades besitzt. Dabei ist $\alpha_{S,T}$ ein Faktorsystem von $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{H}$, das herrührt von der projektiven Darst. Δ von \mathfrak{G}_1 , die durch $\Gamma^{(1)}(sus^{-1}) = \Delta(s) \Gamma^{(1)}(u) \Delta^{-1}(s)$ für alle s aus \mathfrak{G}_1 , u aus \mathfrak{H} , erklärt wird. — Zwei irreduzible Darstellungen von \mathfrak{G} heißen assoziiert, wenn die Ausreduktion der von ihnen induzierten Darst. von \mathfrak{H} denselben Satz unter \mathfrak{G} konj. Darst. liefern. Bei festgehaltenem Faktorsystem $\alpha_{S,T}$ erzeugen zwei Darstellungen $\Delta \times \Lambda^{(1)}$ und $\Delta \times \Lambda^{(2)}$ von \mathfrak{G}_1 genau dann assoziierte Darstellungen \mathfrak{G} , wenn $\Lambda^{(2)}$ zu $\Lambda^{(1)}$ im gewöhnlichen Sinne äquivalent ist. Bei Charakteristik 0 gilt ein Reziprozitätssatz: Wenn die Ausreduktion der von einer irred. Darst. $\Gamma^{(1)}$ von \mathfrak{H} erzeugten Darstellung Γ^* ergibt: $\Gamma^* = \sum_{\alpha=1}^q (\alpha) \Gamma \cdot l_\alpha$, so ergibt die Ausreduktion der von $(\alpha) \Gamma$ induzierten Darstellung $l_\alpha \sum_{i=1}^m \Gamma^{(i)}$. — Anwendung im Falle zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

— Ausdehnung auf Darstellung in halbleinen Transformationen. *Zassenhaus.*

Dietzmann, A.-P.: Sur les groupes infinis. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 952—953 (1937).

Eine Verschärfung der Ergebnisse des Verf. [C. R. Acad. Sci. URSS 15, 71—76 (1937); dies. Zbl. 16, 294] über Bedingungen, unter denen eine Menge von Elementen einer Gruppe eine endliche Untergruppe erzeugt. Eine Menge S einer Gruppe G soll selbstinvariant heißen, wenn mit je zwei Elementen s_1, s_2 von S das Element $s^{-1}s_2s_1$ auch zu S gehört. Dann gilt: Dann und nur dann erzeugt eine Menge M eine endliche Untergruppe, wenn M aus Elementen von endlicher Ordnung besteht und zu einer endlichen selbstinvarianten Menge von G gehört. Daraus folgt eine Bedingung der Endlichkeit der Anzahl von Klassen bei Zerlegung einer Gruppe nach einem Doppelmodul.

A. Kurosch (Moskau).

Yosida, Kôzaku: A remark on a theorem of B. L. van der Waerden. Tôhoku Math. J. 43, 411—413 (1937).

The author obtains a very elegant purely group-theoretical characterization of compact simple Lie groups. The main idea is suggested by van der Waerden's paper "Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen", Math. Z. 36, 780—787 (1933), this Zbl. 6, 392. Use is also made of van Dantzig's concept of a metric group and completeness, of a metrizable theorem of Kakutani and the reviewer, and of a theorem of Freudenthal.

Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

Yosida, Kôzaku: A note on the continuous representation of topological groups. Proc. Imp. Acad. Jap. **12**, 329—331 (1936).

Elsewhere [Jap. J. Math. **13**, 459—472 (1936)] the author has discussed continuous representations \mathfrak{D} , in a complete metric ring, of a connected and locally bicomact topological group \mathfrak{G} , showing that \mathfrak{D} has most, but not necessarily all, properties of a Lie group. Here it is proved that \mathfrak{D} is a Lie group if and only if the application of \mathfrak{G} on \mathfrak{D} is open. The author also proves a theorem of van Kampen [Amer. J. Math. **58**, 177 (1936); this Zbl. **13**, 151] on the dimension of a continuous homomorph of a compact separable topological group.

M. H. Stone (Cambridge, Mass.).

Montgomery, Deane: Almost periodic transformation groups. Trans. Amer. Math. Soc. **42**, 322—332 (1937).

The author studies commutative groups G of homeomorphisms of a locally compact metric space R , which are "almost periodic" in the sense of containing finite " ε -dense" subsets (i.e., subsets g_1, \dots, g_n such that every g is within ε of some g_k — satisfies $\sup |g(x) - g_k(x)| \leq \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$). The definition is like Bochner's and von Neumann's for almost periodic functions. That is, he studies commutative groups having compact closures \bar{G} . (N.B.: Since R is locally compact, \bar{G} is complete.) Such groups are "regular" in the sense of Kerekjarto. Moreover the "orbits" of the points $x \in R$ (i.e., the sets of $g(x)$, $g \in \bar{G}$), are non-overlapping compact sets. It is proved that if R is Euclidean n -space, then either (1) the "space" of these orbits (metrized by a well-known definition of Hausdorff) is "cyclic" in the sense of Alexandroff, or (2) the diameters of the orbits are an unbounded set of numbers. It follows indirectly that no orbit is n -dimensional and some orbit is not even $(n-1)$ -dimensional. Also, if $n=3$, the orbits of a non-trivial compact one-dimensional group cannot be uniformly bounded in diameter [cf. also D. Montgomery and L. Zippin, Periodic one-parameter groups in three-space. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 24—36 (1936); this Zbl. **14**, 346].

Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Kondô, Motokiti: Sur l'hypothèse de M. B. Knaster dans la théorie des ensembles de points. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. **6**, 1—20 (1937).

So nennt Verf. die Annahme (vermutlich schwächer als das Auswahlaxiom), daß es eine Zuordnung gibt, die jeder linearen perfekten Punktmenge einen ihrer Punkte eindeutig entsprechen läßt. Aus dieser Annahme werden zunächst deren Erweiterungen hergeleitet, und zwar: auf perfekte Mengen, die in einem beliebigen metrischen vollständigen und (effektiv) separablen Raume liegen, dann (unter gewissen Voraussetzungen) auf dessen abgeschlossene und sogar bloß entwickelbare Mengen, d. h. auf Mengen der Gestalt $E_0 - E_1 + E_2 - E_3 + \dots$, wo E_n abgeschlossen sind. Bei allen diesen Zuordnungen kann überdies irgendeine vorgegebene, effektiv abzählbare Menge vermieden werden. Schließlich leitet Verf. aus derselben Annahme Existenzsätze her, die auf Grund des Auswahlaxioms gewonnen wurden, wie z. B. die Sätze über Existenz von total unperfekten Mengen, von Familien zueinander punktfremder Mengen, die überall von II. Kategorie, vom positiven äußeren Maß u. dgl. sind; von nichtmeßbaren Funktionen, von Funktionen mit gewissen Integrationssingularitäten usw. *Knaster*.

Sierpiński, W.: Sur une décomposition effective d'ensembles. Fundam. Math. **29**, 1—4 (1937).

Proof of the theorem: If M is an infinite set of cardinal m , the set F of all the functions $f(m, n)$ defined for $m \in M$ and $n \in M$ and taking exclusively the values 0 or 1 can be effectively represented as the sum of a normally ordered series of cardinal $> m$ of mutually exclusive, non-empty sets; moreover, if the existence of a normally ordered set of cardinal m can be proved without recourse to the multiplicative axiom, the proof that this series has more than m terms can likewise be made without this axiom.

A corollary is that the interval $(0, 1)$ can be effectively decomposed into \aleph_1 mutually exclusive non-empty sets. Also, in particular, it is shown without the use of the multiplicative axiom that if M is the set of real numbers, the F of the theorem can be effectively decomposed into \aleph_2 mutually exclusive, non-empty sets, a result proved earlier by the author by means of the multiplicative axiom. *Blumberg* (Columbus).

Sierpiński, Waclaw: Sur les itérations d'ordre transfini. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 18, 1—5 (1936).

If $f(x)$ is a real function, the finite iterates $f_n(x)$ are defined as follows: $f_0(x) = x$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $n = 1, 2, 3, \dots$. The author defines inductively the transfinite iterates $f_\alpha(x)$ for $\alpha < \Omega$ as follows: If $\alpha = \beta + 1$, and $f_\beta(x)$ is defined, $f_\alpha(x) = f(f_\beta(x))$. If α is a number of the second species, and $f_\xi(x)$ is defined for all $\xi < \alpha$, $f_\alpha(x) = \lim_{\xi < \alpha} f_\xi(x)$

provided this limit exists for all real x . The purpose of the present note is to show, by means of the multiplicative axiom, that there exists a real function for which the iterates $f_\alpha(x)$ exist and are different for all $\alpha \leq \Omega$. The author remarks that if the iterate $f_\Omega(x)$ exists, then $f f_\Omega(x) = f_\Omega(x)$, and therefore $f_\alpha(x) = f_\Omega(x)$ for $\alpha > \Omega$.

Blumberg (Columbus).

Kurepa, Georges: Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1033—1035 (1937).

Auf den bekannten Begriff der teilweise geordneten Menge werden die mit der Ordnungsähnlichkeit zusammenhängenden Begriffe ausgedehnt sowie mehrere Ordnungs- und Mächtigkeitsbegriffe für die vom Verf. eingeführten sog. „verzweigten Tafeln“ (vgl. dies. Zbl. 14, 394) eingeführt. Z. B. soll eine verzweigte Tafel T normal heißen, wenn sie entweder endlich oder mit einer derartigen Teilmenge M von ihr selbst gleichmächtig ist, daß für jedes $a \in M$ die Menge aller mit a in T vergleichbaren Elemente von M geordnet ist. Über Begriffe dieser Art werden dann ohne Beweise 3 Sätze ausgesprochen, darunter ein „Théorème fondamental“, in welchem eine für die Normalität von verzweigten Tafeln hinreichende Bedingung formuliert wird, die selbst aus 3 verschiedenen Eigenschaften besteht. In einem Problem fragt Verf. nach einer eindeutigen Abbildung von wohlgeordneten Mengen rationaler Zahlen auf rationale Zahlen, die einem Anfangsstücke einer Menge stets eine kleinere Zahl als der Menge selbst zuordnet.

B. Knaster (Warszawa).

Miller, Edwin W.: On a property of families of sets. C. R. Soc. Sci. Varsovie 30, 31—38 (1937).

The author makes a study of conditions under which a family F of infinite sets will have the property (called property B , after Bernstein) that there exists a set containing some elements of each set of F but exhausting no set of F . It is shown in particular that F will have this property if every set of F is of the same transfinite power p provided every infinite subset of (F) , the sum of all sets of F , contains a finite set which is contained in at most p of the elements of F . Also some conditions are found which do not require that all sets of F have the same power. *Whyburn* (Virginia).

● **Saks, Stanisław:** Theory of the integral. 2., revised edit. Engl. transl. by L. C. Young. With two addit. notes by Stefan Banach. (Monogr. Mat. Tom. 7.) New York: G. E. Stechert & Co. 1937. VI, 347 pag. \$ 5.—.

This book is an English version of the book which appeared in Polish (Zarys Teorji Całki, Warsaw) in 1930 and in French (Théorie de l'intégrale; this Zbl. 7, 105) in 1933. The present edition differs considerably from the preceding French edition not only because it contains many additional topics treated, but also because the order of material is changed. Chapters I and II are devoted to the theory of measure and integration of real-valued functions over abstract spaces. Chapter III deals with functions of bounded variation and Lebesgue-Stieltjes integrals over n -dimensional Euclidean spaces. Chapter IV is devoted to the modern theory of derivation of additive functions of sets and intervals (including derivation in abstract spaces). Considerable attention is given here to the recent work of Ward. Chapter V deals with the theory of area

of a surface $z = f(x, y)$. In Chapter VI the idea of major and minor functions ("fonctions majorantes et minorantes") is rather fully exploited; applications to functions of a complex variable (theorems of Looman-Menchoff, and of Besicovich) and to the theory of Perron and of Perron-Stieltjes integrals are particularly noteworthy. Chapter VII deals with functions of generalized bounded variation, important notion which is applied in the next Chapter VIII to the theory of Denjoy integral. An extensive treatment of various problems of the theory of differentiation of functions of two real variables is contained in Chapter IX. The book closes with two notes of S. Banach, on Haar's measure and on the Lebesgue integral in abstract spaces. The first of these notes was already in the French edition, while the second has not been published before. There is an extensive bibliography. The short space available for this review does not allow to render justice to a considerable amount of new material and of "fine points" contained in this monograph. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Fabian, W.: Conditions under which functions are measurable, integrable, and differentiable. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 807—813 (1937).

Soit $f(z)$ une fonction définie pour z formant une courbe simple L . L'auteur donne les notions de la mesurabilité, de la classes de fonctions à variation bornée et de fonctions absolument continues sur L et établie entre ces notions quelques relations mutuelles.

Marcinkiewicz (Wilno).

Hartogs, F.: Bemerkung zu meiner Arbeit über Bairesche Funktionen. *Math. Z.* 42, 744 (1937).

Certain theorems of Hartogs (see this Zbl. 15, 399) are closely related to theorems of H. Fried (see this Zbl. 2, 385) and H. J. Fischer (this Zbl. 9, 304).

E. W. Chittenden (Iowa City, Iowa).

Analysis.

Tritjzinsky, W. J.: Non-linear difference equations. *Compositio Math.* 5, 1—66 (1937).

A study of the equation (A) $y(x+n) = x^{w/\alpha} a(x, y(x), y(x+1), \dots, y(x+n-1))$, where w, α are integers and $a(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ is analytic in $x^{1/\alpha}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ at $(x^{1/\alpha} = \infty, y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0)$ with $a(x, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$. The first hypothesis (effectively non-essential) is that the associated linear equation (B) $y(x+n) = x^{w/\alpha} a_1(x, y(x), y(x+1), \dots, y(x+n-1))$, where $a_1(x, \dots, y_{n-1})$ consists of the terms of $a(x, \dots, y_{n-1})$ which are linear in the y_i 's, is actually of order n . Then [see Birkhoff, *Acta math.* 54 (1930)] there exist n (formally linearly independent) formal series solutions of (B), each of which contains a factor of the form $\exp[Q(x)]$, where

$Q(x) = \mu x \log x + q_0 x + q_1 x^{\frac{p-1}{p}} + \dots + q_{p-1} x^{\frac{1}{p}}$. The second hypothesis is that among the n functions $Q(x)$ there is at least one whose real part does not vanish identically; this assumption, essential to the argument here employed, permits the construction of certain formal solutions of (A), using a solution of (B) as a first approximation, when x is in a suitable region extending to ∞ to the left (§ 2) or to the right (§ 3); each of these formal solutions involves a finite number of periodic functions of period 1, and is in the form of a power series (generally divergent) in powers of one of these periodic functions $p_1(x)$ (compare results of Horn for the case $n = 1$, to three papers of whom reference is made). A transformation, in terms of $p_1(x)$ and a solution of (B), is set up in § 4; under suitable conditions, this carries (A) into a new equation for which a solution is found (§§ 5, 6) in terms of a series convergent in a certain region; the solution of (A) thus obtained is in a certain sense asymptotically represented by the formal series. Precise descriptions of the "suitable" regions and conditions, etc., are too complicated to be given here. Suffice it to say that the contribution is a substantial one to the study of a non-linear problem which hitherto has been touched upon only lightly. *C. R. Adams* (Providence).

Fabian, W.: Transformation of curves arising from Lebesgue complex integration. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 256—262 (1937).

Kantorovič, L. V.: On the moment problem for a finite interval. Correction to the note. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 16, 147 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 16, 353.

Reihen:

Giaccardi, F.: Su di una condizione perchè una funzione analitica periodica si riduca ad un polinomio trigonometrico. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 25, 557—559 (1937).

The following theorem is proved: If $g(z)$ is periodic, of period 2ω , and analytic in the neighborhood of the axis of reals, then a necessary and sufficient condition that $g(z)$ be a trigonometric polynomial is the existence of two positive constants M, α such that (*) $|g^{(r)}(z)| < \mu \alpha^r$, $r = 1, 2, \dots$, z real. It should be observed that the first part of the theorem (in a more precise form) is the well-known theorem of S. Bernstein. As to the second part, it follows immediately from the formulas $c_n(in)^r$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(r)}(t) e^{-in t} dt$, $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, and (*), without the assumption of analyticity of $g(z)$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Chaundy, T. W.: On a trigonometric series. *J. London Math. Soc.* 12, 296—298 (1937).

A general summation-formula is given, of which

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin^n \theta}{n^r} = \frac{1}{2} \theta^r, \quad |\theta| < \frac{\pi}{r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

is a particular case. The device is elementary. *Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

Szász, Otto: Fourier series and mean moduli of continuity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 42, 366—395 (1937).

The author generalizes the well-known theorems concerning the absolute convergence of Fourier series, due to S. Bernstein [*C. R. Acad. Sci.*, Paris 158, 1661—1663 (1914)] and to himself (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1922, 135—150). We quote the following results. (I) Let $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ be the Fourier series of a function $f(\theta)$, and let

$$\omega_p^{(m)}(f; \delta) = \max_{0 \leq t \leq \delta} \left(\int_0^{2\pi} |\Delta_m f(\theta, t)|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad \text{where } \Delta_m f(\theta; t) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \binom{m}{\nu} f(\theta + (m-2\nu)t)$$

is the m -th symmetric difference of the function f . Let $1 \leq p \leq 2$, $p' = p/(p-1)$,

$k > 0$. Then, if $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k/p'} \omega_p^{(m)}(\pi/2n) < \infty$, the series $\sum_n |c_n|^k$ converges. More generally,

(II) Let $1 \leq p \leq 2$, $0 < p_1 \leq p \leq p_2$, $p = \varrho_1 p_1 + \varrho_2 p_2$, where $\varrho_i \geq 0$, $\varrho_1 + \varrho_2 = 1$.

Then, if $f \in L^{p_2}$ and if, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k/p'} \{ \omega_{p_1}^{(m)}(2\pi/n)^{\varrho_1 p_1} \omega_{p_2}^{(m)}(2\pi/n)^{\varrho_2 p_2} \}^{k/p} < \infty$, the series $\sum_n |c_n|^k$ converges.

(III) Let $\eta(t)$ be a function defined for $0 \leq t \leq 1$, and decreasing to 0 as $t \downarrow 0$. Let, moreover, (*) $\int_1^u \eta(1/t) dt = O(u \eta(1/u))$ as $u \rightarrow \infty$, while (*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/p'} \eta(1/n) = \infty$,

where $1 \leq p \leq 2$. Then there is a function $f \in L^p$ such that $\omega_p^{(m)}(f; \delta) < \eta(\delta)$, but $\sum_n |c_n|_u^k = \infty$.

(IV) If $p = 2$, and if conditions (*) and (*) are replaced respectively by $\int_1^u x \eta^2(1/x) dx = O(u^2 \eta^2(1/u))$ and $\sum_n n^{-k/2} \eta^k(1/n) = \infty$, then there is an $f(\theta) \in L^2$,

such that $\omega_2^{(m)}(f; \delta) < \eta(\delta)$, but $\sum_n |c_n|^k = \infty$.

A. Zygmund (Wilno).

Salem, Raphaël: Approximations diophantiennes et séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 832—833 (1937).

Considérons la série trigonométrique (*) $\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{2\pi i(n x - s_n)}$ ($r_n \geq 0$, $0 \leq x < 1$), où les r_n sont supposés donnés. Sous la seule condition que la divergence de la série $\sum r_n$ ne soit pas „trop lente“, on peut déterminer les nombres réels s_n de façon que la série (*) diverge pour un ensemble de points x partout dense et ayant la puissance du continu. Si $\sum r_n^2$ converge, l'ensemble E de points pour lesquels l'auteur peut démontrer la divergence de la série (*) est de mesure nulle. *A. Zygmund (Wilno).*

Cooke, Richard G.: A new method for the summability of divergent sequences. J. London Math. Soc. 12, 299—304 (1937).

A matrix $\{a_{\omega k}\}$, where $k = 1, 2, \dots$, and ω is a continuous variable tending to $+\infty$, is said to be a T -matrix, if the following three conditions are satisfied

$$(A) \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\omega k}| \leq M, \quad (B) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\omega k} = 1, \quad (C) \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_{\omega k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Let J_ν denote Bessel's function of order ν . It is shown that (I) the matrix (*) $\{a_{\omega k}\} = \{2J_{k+\nu}^2(\omega)\}$, where ν is any fixed real number, is a T -matrix. A sequence $\{s_k\}$ summable by means of the matrix (*) is said to be summable (J, ν) . The main result of the paper is that (II) the Fourier series of any L -integrable function $f(x)$ is summable $(J, \frac{1}{2})$ to the sum $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ for every value of x for which this expression has a meaning; and is summable $(J, \frac{1}{2})$ to the sum $f(x)$ at every point of the Lebesgue set, and so almost everywhere. *A. Zygmund (Wilno).*

Jacob, M.: Über die Cesàro'sche Summierbarkeit von Reihenentwicklungen nach Hermite'schen Polynomen. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 245—251.

L'A. étudie les conditions suffisantes de sommabilité $(C, 1)$ du développement d'une fonction $f(x)$ en série de polynômes d'Hermite, conditions relatives au comportement de la fonction développée $f(x)$ au voisinage du point x où l'on considère la série en question, la condition à l'infini étant celle bien connue de l'existence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot |f(u)| \cdot \frac{du}{(1+|u|)^3}.$$

Il améliore le résultat de Korous, en montrant que la condition de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |f(x+u) + f(x-u) - 2 \cdot A| \cdot du = 0$$

dont la suffisance était prouvée par Korous peut être remplacée par la condition

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \{f(x+u) + f(x-u) - 2A\} du = 0$$

jointe à celle $\Phi(\varepsilon) < K \cdot \varepsilon$ ($K = \text{const.}$).

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Spezielle Funktionen:

Palamà, Giuseppe: Sui polinomi di Legendre di Laguerre e di Hermite. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 147—191 (1937).

The author applies to the generating functions for the polynomials under discussion various formal operations (partial differentiation with respect to the variables and to the parameters, replacing the variable x by $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, mx , $\frac{x}{m}$, \dots).

In this way numerous relations are derived; among others, theorems on addition, multiplication and division. Thus, for Laguerre polynomials $L_{n,\alpha}(x)$, we express

$L_{n,\alpha}(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$, $L_{n,\alpha}(mx)$, $L_{n,\alpha}(\frac{x}{m})$, $\frac{\partial^r L_{n,\alpha}(x)}{\partial \alpha^r}$, $\frac{d^r}{dx^r} L_{n,\alpha}(x)$, \dots in terms of

$L_{n-i,\alpha}(x)$. [Many of the results derived are well known. For ex., results involving the r -th derivative $P_n^{(r)}(x)$ of the Legendre polynomial $P_n(x)$ follow immediately from the fact that $P_n^{(r)}(x)$ is identical with the symmetric Jacobi polynomial $J_{n-r}(x, \alpha + r, \alpha + r)$ Ref.] Application is made to binomial coefficients, also to certain numbers $C_{i,n}$ generalizing those of Stirling, of first kind. *J. Shohat*.

Webster, M. S.: On the zeros of Jacobi polynomials, with applications. *Duke math. J.* **3**, 426—442 (1937).

The author first studies the distribution of the zeros of the generalized Jacobi and Laguerre polynomials $J_n(x; \alpha, \beta)$, $L_n(x; \alpha)$, with arbitrary real parameters α, β , thus completing in some respects the results previously obtained by others [cf., e. g., W. Lawton, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**, 442—448 (1932)]. Here the main tool is the differential equation satisfied by these polynomials. — He next turns to the more important case of orthogonal Jacobi polynomials ($\alpha, \beta > 0$). The author combines here a geometrical method (applied previously — Hahn, Winston — to the polynomials of Laguerre and Hermite) with Markoff's theorem (concerning the dependence of the zeros in question on the parameters α, β). Application is made to estimating the coefficients in the corresponding Gaussian Formula of Mechanical Quadratures. *J. Shohat* (Philadelphia).

Humbert, Pierre: On Bessel product functions. *Philos. Mag.*, VII. s. **24**, 888—890 (1937).

The Bessel product functions under consideration are: $\text{ber}_n^2(x) + \text{bei}_n^2(x)$; $\text{ber}_n'^2(x) + \text{bei}_n'^2(x)$; $\text{ber}_n(x) \text{ber}_n''(x) + \text{bei}_n(x) \text{bei}_n''(x)$ and $\text{ber}_n(x) \text{bei}_n'(x) - \text{bei}_n(x) \text{ber}_n'(x)$. It is shown that these functions can be expressed by hypergeometric functions. These expressions lead up to a new expression of a Bessel function as an infinite integral, the integrand of which is a product of an exponential function and a Bessel product function of the type named above. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Sharma, J.-L.: On integral equation satisfied by Lamé's functions whose order is half of an odd integer. *J. Math. pures appl.*, IX. s. **16**, 355—360 (1937).

Verf. betrachtet Lamésche Potentialfunktionen (vgl. *Erg. Math.* **1**, H. 3) und geht aus von der Weierstrassschen Form der Differentialgleichung dieser Funktionen. Wenn die Ordnung der Funktionen die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, sind die Lösungen nach Crawford bekannt. Diese Lösungen genügen einer homogenen Integralgleichung, wobei der Kern das Produkt einer hypergeometrischen Funktion und eines Polynoms von Weierstrassschen Funktionen ist. *M. J. O. Strutt*.

Erdélyi, Artur: Untersuchungen über Produkte von Whittakerschen Funktionen. *Mh. Math. Phys.* **46**, 132—156 (1937).

Die Laplacesche Transformierte der Funktion $F(t)$ oder die zur Objektfunktion $F(t)$ gehörende Resultatfunktion $f(s)$ wird erklärt durch die Gleichung

$$f(s) = \mathcal{L}_s\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \quad (\text{eindimensionale } \mathcal{L}\text{-Transformation}).$$

Als die Faltung zweier Funktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ bezeichnet man folgenden Ausdruck

$$F_1 * F_2(t) \equiv \int_0^t F_1(x) F_2(t-x) dx.$$

Ähnlich für zwei Veränderliche

$$f(s, \sigma) = \mathcal{L}_{s, \sigma}\{F(t, \tau)\} \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st - \sigma\tau} F(t, \tau) dt d\tau \quad (\text{zweidimensionale } \mathcal{L}\text{-Transformation}).$$

Die Faltung zweier Funktionen wird in diesem Falle erklärt durch

$$F_1 * F_2(t, \tau) \equiv \int_0^t \int_0^\tau F_1(x, \xi) F_2(t-x, \tau-\xi) dx d\xi.$$

Im folgenden bedeutet $M_{k,m}(t)$ die von Whittaker eingeführte Funktion

$$M_{k,m}(t) = t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} - k + m \\ 2m + 1 \end{matrix}; t \right], \quad k \text{ beliebig komplex, } m \neq -\frac{p}{2}; \quad p \text{ beliebig ganz}$$

$$N_{k,m}(t) = \frac{t^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m+1)} M_{k,m}(t).$$

Der Verf. behandelt die Reihenentwicklungen, die Produkte von Whittakerschen Funktionen enthalten, nach dreierlei Methoden: 1. werden durch Verwendung bereits bekannter Funktionalbeziehungen zwischen Wh.-Funktionen solche für Produkte dieser Funktionen hergeleitet. 2. wird ein Produkt von der Form $M_{k,m}(at)M_{k',m'}(bt)$ als $F(t)$ (t reell) betrachtet und durch Anwendung der eindimensionalen L -Transformation behandelt. 3. wird das Produkt $M_{k,m}(t)M_{k',m'}(\tau)$ als $F(t, \tau)$ betrachtet und durch Anwendung der zweidimensionalen L -Transformation behandelt. — So findet er durch die zweite Methode u. a.:

$$N_{k,m}(t)N_{l,m}(t) = t^{2m} e^{-\frac{t}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m+r)\Gamma(\frac{1}{2}-l+m+r)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-l+m)\Gamma(2m+r+1)r!} N_{k+l-m-r-\frac{1}{2}, m+r}(t).$$

Sonderfälle sind 1. $l = m + n + \frac{1}{2}$, wo Laguerresche Polynome auftreten, wegen

$$N_{m+n+\frac{1}{2}, m}(t) = \frac{n! t^{2m} e^{-\frac{t}{2}}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(t).$$

2. $l = -k$:

$$N_{k,m}(t)N_{-k,m}(t) = t^{4m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m+r)\Gamma(\frac{1}{2}+k+m+r)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\Gamma(2m+r+1)\Gamma(2m+2r+1)} \frac{t^{2r}}{r!}.$$

Durch Anwendung der dritten Methode findet er u. a.:

$$\begin{aligned} K(t, \tau; x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \Gamma(2\nu+r) N_{k+r,m}(t) N_{\kappa+r,\mu}(\tau) \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}-\nu}}{1-x} N_{k-\nu, m-\nu}(t) N_{\kappa-\nu, \mu-\nu}(\tau) \ast \ast (t\tau)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1+x}{1-x}(t+\tau)} I_{2\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{x t \tau}}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Es wird noch eine zweite Darstellung von $K(t, \tau; x)$ abgeleitet, nämlich

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \Gamma(\frac{1}{2} + \kappa + \mu + r) N_{k+r,m}(t) N_{\kappa+r,\mu}(\tau) = \frac{t^m \tau^m x^{-\frac{1}{2}(k+m-\frac{1}{2})}}{4 \cos(k+m)\pi \cos(\kappa+\mu)\pi} e^{\frac{1}{2}(t-\tau)-(k+\kappa+m+\mu)\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u-v} u^{\frac{1}{2}(k-m-\frac{1}{2})} v^{\frac{1}{2}(\kappa-\mu-\frac{1}{2})} J_{2m}(2\sqrt{ut}) J_{2\mu}(2\sqrt{v\tau}) I_{k+m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{uvx}) du dv$$

für $2\nu = \frac{1}{2} + \kappa + \mu$. Weiter wird gezeigt, daß bei der Entwicklung von $x^{-m} J_{2m}(2\sqrt{x t})$ (als Funktion von x betrachtet) nach Laguerreschen Polynomen als Koeffizienten im wesentlichen die Wh.-Funktionen auftreten, nämlich

$$t^m J_{2m}(2\sqrt{x t}) = x^m e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} N_{k+\frac{n}{2}, m+\frac{n}{2}}(t) L_n^{(k+m-\frac{1}{2})}(x).$$

Zum Schluß werden diese Methoden durch mehrdimensionale Faltung auf den Fall von Produkten von mehr als zwei Wh.-Funktionen ausgedehnt. *S. C. van Veen.*

● **Kampé de Fériet, J.:** La fonction hypergéométrique. Mém. Sci. math. Fasc. 85, 87 pag. Paris (1937).

Gedrängte Darstellung des Gesamtgebietes in der üblichen Anordnung des Stoffes. Die Bibliographie ist bis zum Jahr 1927 geführt. *v. Koppenfels* (Würzburg).

Racah, Giulio: Sopra alcuni integrali collegati agli integrali ellittici e loro valutazione asintotica. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 70, 340—354 (1937).

Mit $0 < k < 1$; $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)} = w$; $\int_0^k \frac{dt}{w} = F$ und $1 + k^2 - 2k^2t^2 + 2kw = (1-k^2)e^L$ beweist Verf. Identitäten wie

$$\int_0^1 \frac{dt}{w} L^2 = 8F \int_0^k \frac{dk}{(k-k^3)F^3} \int_0^k \frac{dk k F^2}{1-k^2}$$

und Grenzwerte wie z. B.

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left\{ 4 \left(\log \frac{\sqrt{1-k^2}}{4} \right)^3 - \pi^2 \log \frac{\sqrt{1-k^2}}{4} + 3 \int_0^1 \frac{dt}{w} L^2 \right\} = 6 \sum_{h=1}^{\infty} h^{-3}.$$

Wilhelm Maier (Greifswald).

Heuman, Carl: Zur Theorie der elliptischen Integrale. Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 2, 1—25 (1937).

Während das Abelsche Theorem algebraische Integranden betrachtet, deren Integrationsgrenzen algebraisch verknüpft sind, beschränkt sich Verf. hier auf elliptische Integrale. Bei fester Amplitude und geeigneten Parametern reduzieren sich Summen von elliptischen Integralen 3. Gattung auf elementare Funktionen. Setzt man in Legendres Bezeichnung nämlich

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \frac{\xi - \eta \sin^2 \varphi}{1 - p \sin^2 \varphi} = H(\xi, \eta, p)$$

und hält die reelle Kennzahl $\frac{p(p-k^2)(p-1)}{(p\xi-\eta)^2} = R$

fest, so gibt eine Kurve 3. Klasse Anlaß zu 3 geometrisch eingeführten Wertetripeln ξ_ν, η_ν, p_ν ($\nu = 1, 2, 3$) derart, daß mit festem a sich der Ausdruck

$$(a - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \sum_{\nu=1}^3 H(\xi_\nu, \eta_\nu, p_\nu)$$

reduziert auf elementare Funktionen; Verallgemeinerungen.

Wilhelm Maier.

Petersson, Hans: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. I. Grenzkreisgruppen und Riemannsche Flächen; Theorie der Faktoren- und Multiplikatorsysteme komplexer Dimension. Math. Ann. 115, 23—67 (1937).

S. dies. Zbl. 17, 25. a) Nach Def. der Grenzkreisgruppe konstruiert Verf. aus der oberen Halbebene \mathfrak{H} eine Riemannsche Fl. \mathfrak{B} , als deren Punkte er die Systeme äquivalenter Punkte von \mathfrak{H} erklärt. Die Konstruktion wird aus § 21 von Weyls Buch (zit. mit W.) übernommen und durch einige Sätze über die Einbeziehung der parabolischen Randpunkte ergänzt. \mathfrak{H} ist universelle Überlagerungsfl. über \mathfrak{B} , die über den Bildern der ell. und par. Fixpunkte entsprechend verzweigt ist. b) Verf. zeigt, daß einem multiplikativen Differential auf \mathfrak{H} ein Divisor $\mathfrak{d}_{\mathfrak{B}}$ auf \mathfrak{B} zukommt, und bestimmt ihn. (Die parab. Fixp. erfordern eine gegen W. neue Def. des analyt. Differentials.) Jede bis auf Pole reguläre a. F. der Dimension -2 (und eine solche liefert die Grenzkreisuniformisierung) ergibt ein mult. Differential auf \mathfrak{H} . Auch die a. F. hat in

einem Fundamentalebereich \mathfrak{R} in \mathfrak{H} einen Divisor $\mathfrak{d}_{\mathfrak{R}}$. Es gilt $\mathfrak{d}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{B}} \cdot \Pi(s) \Pi(\omega)^{1-\frac{1}{l}}$ ($l = \text{Ordnung}$), wenn die entsprechenden Punkte von \mathfrak{R} und \mathfrak{B} nicht unterschieden werden. Die Produkte sind über alle inäquivalenten Spitzen und Ecken zu erstrecken. c) Die $\sigma(L_1, L_2)$ haben die Gestalt $e^{2\pi i w(L_1, L_2)}$. Nach einer für $\tau \in \mathfrak{H}$ stetigen Fixierung von $\arg(a\tau + b)$ — mit reellen a, b — findet man $2\pi i \cdot w(L_1, L_2)$ als Summe dreier solcher arg.-Werte. Indem Verf. τ auf bestimmten Wegen gegen den Rand von \mathfrak{H}

streben läßt, berechnet er $w(=\pm 1,0)$ für alle L_1, L_2 und leitet einige Formeln dafür ab. Eine ähnliche Darstellung als Summe von arg-Werten gilt auch für $w_n(L_1, L_2, \dots, L_n)$, das zur Berechnung von $v(L_1, L_2, \dots, L_n)$ aus den $v(L)$ nötig ist. d) Für die zyklische Gruppe der Substitutionen aus Γ , die einen ell. oder parab. Fixpunkt fest lassen, werden Erzeugende E bzw. P normiert, so daß sie ξ in vom Fixpunkt aus gesehen positivem Sinne um das kleinstmögliche Stück drehen und in der linken, unteren Ecke ihrer Matrix

ein negatives Element haben. Es wird $v(E)$ zu $e^{\pi i \frac{r}{l}} \cdot \zeta_l^a$ mit ganzem a bestimmt und eine Entwicklung für die a. Formen $f(\tau) = (\tau - \bar{\omega})^{-r} (\tau - \omega/\tau - \bar{\omega})^a \mathfrak{P}((\tau - \omega/\tau - \bar{\omega})^r)$ aufgestellt. (\mathfrak{P} bedeutet Potenzreihe mit nur endlich vielen negativen Gliedern.) Sind E und F die normierten Erzeugenden zu äquivalenten Ecken, so ist $v(E) = v(F)$. Die $\sigma(E)$ und $\sigma_n(E, E, \dots, E)$ werden explizit berechnet. e) Γ hat dann und nur dann ein endliches Erzeugendensystem und heißt von erster Art, wenn \mathfrak{B} geschlossen und ξ über nur endlich vielen Punkten von \mathfrak{B} verzweigt ist. Sei Γ von erster Art, \mathfrak{B} vom Geschlechte p und über σ Punkten in unendlicher, über e_0 Punkten in endlicher Ordnung verzweigt. \mathfrak{B} werde durch ein kanonisches Schnittsystem \mathfrak{S} (W. § 11) zu einer einfach zusammenhängenden, berandeten Fl. aufgeschnitten. \mathfrak{S} kann so gewählt werden, daß alle Schnitte sich nur in einem einzigen Punkt treffen, bei Umlauf um diesen Punkt in vorgeschriebener Reihenfolge getroffen werden und aus lauter Bildern von in ξ nichteuklidisch geraden Strecken bestehen. Damit wird in ξ ein einf. zusammenhängender, berandeter Fundamentalbereich konstruiert, der kanonisch heißt. Daraus ergeben sich die Erzeugenden $-I, P_1 \dots P_\sigma, E_1 \dots E_{e_0}, G_1, H_1, \dots, G_p, H_p$, worin die E und P zu den inäquivalenten Ecken und Spitzen gehören und die G_i, H_i die Überschreitung des i -ten Rückkehrschnittpaares bewirken. Die def. Rel. ergeben sich aus den geschlossenen Wegen in ξ zu $(-I)^2 = I, E_k^{l_k} = -I, P_1 \dots P_\sigma E_1 \dots E_{e_0} G_1 H_1 G_1^{-1} H_1^{-1} \dots G_p^{-1} H_p^{-1} = \pm I$. Ist Γ von zweiter Art, so erhält Verf. mit Hilfe der Arbeit von Koebe, Acta math. 50, 29—157, und W. §§ 9, 11, eine entsprechende Aufschneidung von \mathfrak{B} (wobei jedoch die Querschnitte aus ∞ vielen Elementarstrecken bestehen) und einen kanonischen F.B. \mathfrak{R} . Die def. Rel. haben jetzt die Form $(-I)^2 = I, E_k^{l_k} = -I$. Mit Hilfe der unter d) berechneten σ_n erhält man aus den Umlaufrelationen um die ell. Ecken $v(-I) = e^{-\pi i r}, v(E_k)^{l_k} = e^{\pi i r}$ als Bedingungen für das M.S. — Die letzte Relation bei Γ von erster Art kann jetzt noch nicht explizit verwandelt werden. — Außer in b) verwendet Verf. nur elementararithmetische, topologische und auf der Existenz der a. F., über die der betreffende Satz etwas aussagt, beruhende Schlüsse ohne Uniformisierungstheorie u. ä.

Lochs (Kennelbach).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Mitrinovitsh, Dragoslav S.: Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de géométrie. Bull. Sci. math., II. s. 61, 323—325 (1937).

L'auteur ramène l'équation $\frac{dt}{dx} = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3$, $q_i = \varphi_i(x)$, intégrables par des quadratures, à l'équation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0$, $a_i = \psi_i(x)$.
S. Finikoff (Moscou).

Drach, Jules: Sur la réduction de l'équation générale de Riccati. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 700—704 (1937).

Die Reduktion der Riccatischen Differentialgleichung wird im Sinne der Picard-schen Theorie entwickelt.
v. Koppensfels (Würzburg).

Langer, Rudolph E.: The expansion theory of ordinary differential systems of the first order. Duke math. J. 3, 383—393 (1937).

Il est connu que pour le système

$$y'(s) - [\rho q(s) + r(s)] y(s) = 0, \quad \alpha y(a) = \beta y(b)$$

les propriétés des développements des fonctions données en séries suivant les fonctions

fundamentales sont différentes en grande partie de celles pour le second ordre. Ainsi par ex. le développement d'une fonction donnée ne converge que rarement vers la fonction en question, etc. Pour éviter cet inconvénient l'auteur démontre qu'on peut indiquer sur (a, b) des ensembles ouverts Δ [dépendants des propriétés de $q(s)$] où l'on peut établir une „orthogonalité“ généralisée des fonctions fondamentales, ce qui donne des développements en séries sur chacun de ces Δ ayant des propriétés analogues au cas du second ordre.

Janczewski (Leningrad).

Nagumo, Mitio: Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 861—866 (1937).

Ist die rechte Seite der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

in einem Gebiet $\mathfrak{B}(x, y)$ bei beliebigem y' definiert, so kann es schon bei sehr harmlosen Gleichungen (Beispiel: $y'' = 2y'^3$) vorkommen, daß eine Integralkurve nicht den Rand von \mathfrak{B} erreicht, sondern im Innern von \mathfrak{B} endigt. Verf. zeigt nun: I. Es sei \mathfrak{B} ein Gebiet in der x, y -Ebene, \mathfrak{B}^* der Zylinder: x, y in \mathfrak{B} , $-\infty < z < +\infty$. Ist $f(x, y, z)$ in \mathfrak{B}^* stetig und

$$|f(x, y, z)| \leq \varphi(|z|),$$

wo $\varphi(u)$ eine positive stetige Funktion von $u \geq 0$ mit

$$\int_a^\infty \frac{u \, du}{\varphi(u)} = +\infty$$

ist, so kann jede Integralkurve von (1) nach beiden Seiten bis an den Rand von \mathfrak{B} fortgesetzt werden. II. Lösbarkeit einer Randwertaufgabe. Es sei \mathfrak{B} der Bereich

$$a \leq x \leq b, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x);$$

dabei sollen $\underline{\omega}, \bar{\omega}$ zweimal differenzierbar sein und die Ungleichungen

$$\underline{\omega}(x) < \bar{\omega}(x), \quad \underline{\omega}'' > f(x, \underline{\omega}, \underline{\omega}'), \quad \bar{\omega}'' < f(x, \bar{\omega}, \bar{\omega}')$$

erfüllen. Die Funktion $f(x, y, z)$ soll die Voraussetzungen von I. erfüllen und noch stetige partielle Ableitungen nach y und z haben. Dann gibt es durch je 2 Punkte der linken bzw. rechten Randstrecke von \mathfrak{B} mindestens eine Integralkurve von (1), welche die beiden Punkte verbindet.

Kamke (Tübingen).

Collatz, L.: Schranken für den ersten Eigenwert bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ing.-Arch. 8, 325—331 (1937).

Sei λ der kleinste Eigenwert und $f(x)$ die zugehörige Eigenfunktion des Problems

$$L[f(x)] = \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{df}{dx} \right] + \lambda p(x) f(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $f(0) = f(a) = 0$ und $r(x) > 0$, $p(x) > 0$. Dann ist eine obere Schranke von λ durch jeden Ausdruck der Form

$$Q_1 = \frac{\int_0^a r y'^2 dx}{\int_0^a p y^2 dx}$$

gegeben, wenn für $y(x)$ irgendeine stückweise stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ mit $y(0) = y(a) = 0$ gesetzt wird. Um auch zu einer unteren Schranke zu kommen, verwendet der Autor die Identität

$$Q_1 = \lambda + \frac{\int_0^a r \left(y' - y \frac{f'}{f} \right)^2 dx}{\int_0^a p y^2 dx}.$$

Bedeutet Q eine obere Schranke für das Integral der rechten Seite, dann wird $Q_1 - Q$ eine untere Schranke für λ . Eine solche Schranke Q wird hergeleitet ohne explizite Kenntnis von $f(x)$. — Anwendung auf das Beispiel $L[f] = f'' + \lambda(1+x)f = 0$.

Rellich (Marburg, Lahn).

Trijitzinsky, W. J.: Theory of non-linear singular differential systems. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 225—321 (1937).

L'auteur étudie le système

$$t^{-\varepsilon} y_j^{(1)}(t) = a_j(t, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1 \dots n; p \text{ entier} \geq 0) \quad (\text{A})$$

$$a_j = l_j + g_j = \sum_{k=1}^n l_{kj}(t) y_k + \sum_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 \dots i_n}(t) y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$$

$$(i_1, \dots, i_n \geq 0; i_1 + \dots + i_n \geq 2)$$

$l_{kj}, a_{i_1 \dots i_n}$ étant analytiques pour $|t| \geq r > 0$ et la série g_j convergente pour $|t| \geq r; |y_1|, \dots, |y_n| \leq \varrho$. — Le point du départ est pour l'auteur le système linéaire correspondant; il s'appuie là sur son mémoire précédent (ce Zbl. 14, 348). Ayant considéré quelques systèmes auxiliaires, il construit une solution formelle du système (A) qui donne une formule asymptotique pour les $y_j(t)$. On obtient ici

$$y_j(t) = \sum_{\nu=1}^{N-1} \sum_{k_1 + \dots + k_m = \nu} c_1^{k_1} \dots c_m^{k_m} \gamma_{k_1 \dots k_m j}(t) + \varrho_j(t),$$

$$\gamma_{k_1 \dots k_m j}(t) = \exp[k_1 Q_1(t) + \dots + k_m Q_m(t)] t^{k_1 r_1 + \dots + k_m r_m} t^{(\nu-1)w'_\nu} [t]_{q\nu},$$

$Q_i(t)$ étant certains polynômes, w'_ν nombres rationnels, $c_1 \dots$ constantes arbitraires ($|c_i| \leq c'$),

$[t]_q = p_0(t) + p_1(t) \log t + \dots + p_q(t) \log^q t$, $p_j(t) \propto p_{j,0} + p_{j,1} t^{-1/k} + p_{j,2} t^{-2/k} + \dots$. t varie dans un domaine, où l'on a $|t| \geq r^*$, et dont les frontières latérales sont deux courbes analytiques ayant chacune une seule direction limite à ∞ . $\varrho_j(t)$ sont analytiques dans ce domaine et l'on a

$$|\varrho_j(t)| < h'(c')^N |t|^{(N-1)h_0} \sum_{k_1 + \dots + k_m = N} |\exp[k_1 Q_1(t) + \dots + k_m Q_m(t)] t^{k_1 r_0 + \dots + k_m r_m}|$$

(c' doit être suffisamment petit et r^* suffisamment grand). — Si l'on pose dans (A) $p = 0$, a_j indépendants de t , on peut obtenir alors un nouveau théorème d'existence d'un caractère plus précis. — Il est important que ces théorèmes sont indépendant de N (\geq d'une certaine valeur). — Un théorème analogue est obtenu encore pour le système $\lambda^{-p} y_j^{(1)}(x) = a_j(\lambda, x, y_1 \dots y_n)$, avec a_j analytiques en λ, y_1, \dots, y_n dans le voisinage de $\lambda = \infty, y_1 = \dots = y_n = 0, x \in (a, b)$, et continues en x . Janczewski.

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Bochner, S.: Completely monotone functions of the Laplace operator for torus and sphere. Duke math. J. 3, 488—502 (1937).

Es bedeutet im folgenden $\Delta g = -\frac{1}{(2\pi)^k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) g$; $g(x) = g(x_1, \dots, x_k)$

ist stets quadratintegrierbar, und der Definitionsbereich des Operators im Hilbertschen Raum kann dann auch auf gewisse nicht zweimal differenzierbare g ausgedehnt werden. Gegenstand der Untersuchung sind Operatoren $\varphi(\Delta)$, wobei $\varphi(r)$ für $0 \leq r < \infty$ definiert und mit Ableitungen beliebiger Ordnung versehen ist derart, daß $(-1)^n \varphi^{(n)}(r) \geq 0$ ist. Zunächst wird für Funktionen $g(x)$, die in sämtlichen Veränderlichen periodisch mit der Periode 1 sind, eine Integraldarstellung $\varphi(\Delta)g(x) = \int G(x - \xi) g(\xi) d\xi$ gerechtfertigt, wobei über eine volle Periode integriert wird. Sodann untersucht Verf. das Verhalten der Greenschen Funktion $G(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes, und zwar in Abhängigkeit vom Verhalten von $\varphi(r)$ für $r \rightarrow \infty$. — Diese Resultate können auch auf Funktionen auf der k -dimensionalen Kugelfläche übertragen werden, doch gelangt man zu expliziten Ausdrücken wie vorhin nur für Funktionen der Form $\varphi(r) = \varphi((r^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}} - \nu)$ mit $2\nu = k - 1$; es ist dann auch $(-1)^n \varphi^{(n)}(r) \geq 0$. Feller.

Lowan, Arnold N.: On some two-dimensional problems in heat conduction. Philos. Mag., VII. s. 24, 410—424 (1937).

In the region $0 < x < a; 0 < y < b; t > 0$ a function $T(x, y, t)$ is to be found such that $\kappa(T_{xx} + T_{yy}) = T_t - \psi(x, y, t)$, $\lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, t) = f(x, y)$ as $t \rightarrow 0$ the functions $\Psi(x, y, t)$ and $f(x, y)$ being prescribed. The boundary conditions are that for

$t > 0$ T_y is to be zero for $y = 0$ and $y = b$, $\alpha_1 T_x + \beta_1 T$ is to be equal to a prescribed function $\Phi_1(y, t)$ for $x = 0$ and $\alpha_2 T_x + \beta_2 T$ equal to a prescribed function $\Phi_2(y, t)$ for $x = a$. The problem is solved by writing $T = u + v$ where u is the solution of the foregoing problem when f and Ψ are identically zero while v is the solution when Φ_1 and Φ_2 are identically zero but f and Ψ are not. Both auxiliary problems are solved by operational methods. For the first infinite series are employed, for the second a Green's function.

H. Bateman (Pasadena).

Reulos, René: Étude sur une nouvelle méthode d'intégration des équations de Maxwell et son application au calcul du champ électromagnétique de l'électron en mouvement. Ann. Physique 7, 700—789 (1937).

Im ersten Abschnitt geht Verf. von den Maxwellschen Gleichungen aus und zeigt, wie sie durch Einführung eines skalaren und eines Vektorpotentials integriert werden können. Diese Potentiale werden durch Integration gewonnen, wobei die elektrische Ladungsdichte und die Geschwindigkeit der Ladungsdichte in retardierter Form eingeführt werden müssen, was durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes bedingt ist. Die Potentiale sind somit von Ladungsdichte und Geschwindigkeit zu einem früheren Zeitpunkt abhängig und man bekommt durch diese klassische Integrationsmethode kein Gesamtbild des elektromagnetischen Feldes in einem einzigen Zeitpunkt. Um den Begriff der elektrischen Ladungsdichte auch in der Elektronentheorie beibehalten zu können, wird nach Lorentz eine Struktur des Elektrons angenommen. Verf. zeigt diese Verhältnisse an zwei Beispielen: retardierte Geschwindigkeit gleich 0 und gleichmäßige geradlinige Bewegung. Nach einer kurzen Einführung der Grundformeln der Vektorenrechnung, wobei räumliche Polarkoordinaten eingeführt werden, betrachtet Verf. Felder, die eine Rotationssymmetrieachse besitzen, und zwar Felder, deren Vektoren in Ebenen durch die Rotationsachse, und Felder, die in Ebenen senkrecht zur Rotationsachse gelegen sind. Er definiert Wirbelfolgen dadurch, daß der n -te Vektor durch Rotationsbildung aus dem $(n + 1)$ -ten Vektor erhalten wird. Man kann hierbei von einem Vektorfeld ausgehen, dessen Divergenz gleich 0 ist, und von einem Vektorfeld, dessen Divergenz und Rotation gleich 0 sind, und erhält in dieser Weise zwei Arten von Wirbelfolgen, die Verf. als komplementär bezeichnet. Für solche Wirbelfolgen werden Beispiele in räumlichen Polarkoordinaten gegeben. Bei der Anwendung dieser Wirbelfolgen auf die Integration der Maxwellschen Gleichungen geht Verf. von einem skalaren Potential aus und definiert eine Wirbelfolge von Vektoren, wobei die zeitliche Ableitung jedes Vektors durch Rotationsbildung aus einem Vektor mit um 1 größerem Zeiger gewonnen wird, und zwar abwechselnd mit negativem und positivem Vorzeichen. Die elektrische Feldstärke wird gleich der Summe aller Vektoren (in unendlicher Anzahl) mit geraden Zeigern gesetzt, die magnetische Feldstärke gleich der Summe der Vektoren mit ungeraden Zeigern. Diese Feldstärken genügen dann den Maxwellschen Gleichungen. Bei der Anwendung auf ein Elektron wird die Ladung punktförmig konzentriert angenommen, wobei die elektrische Feldstärke des ruhenden Elektrons in bekannter Weise umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ist. Bei der Berechnung des Feldes eines bewegten Elektrons geht Verf. von dieser elektrischen Feldstärke des ruhenden Elektrons aus und bildet eine Wirbelfolge der beschriebenen Art, wobei die Vektoren mit geradem Zeiger addiert die elektrische Feldstärke und die Vektoren mit ungeradem Zeiger addiert die magnetische Feldstärke ergeben. Diese Berechnung wird in analoger Weise auf Vektorpotentiale ausgedehnt. Als Anwendung werden die Felder eines geradlinig bewegten Elektrons sowie eines Elektrons mit willkürlicher Bahnbewegung ausführlich berechnet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Lewis, T.: Some applications of the Kirchhoff-Dirac function in problems involving solutions of the classical wave equation. Philos. Mag., VII. s. 24, 329—360 (1937).

[The solutions by means of definite integrals of physical equations with initial or boundary conditions involving arbitrary functions led to the introduction of a type

of function which Murphy called a transient function. Functions of this type are zero except at one point where there is a discontinuity which will make the improper integral of the function equal to unity. Such functions occurred incidentally in the work of Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson and Cauchy; they were studied systematically in 1835 by Murphy who endeavoured to find other ways in which they might occur and be used.] Kirchhoff's application in optics of a function which is zero except in a small interval and Dirac's use of his δ -function in wave mechanics induced the author to seek further applications of such functions in problems involving solutions of the classical wave equation. — The properties of Kirchhoff's function $K(x)$ and Dirac's function $\delta(x)$ are first developed. The Poisson-Liouville formula for the solution of the wave-equation for prescribed initial conditions is then obtained directly without a previous derivation of Kirchhoff's formula. The corresponding solution for two-dimensions is derived in more than one form. Besides the Poisson-Parseval formula there is a simpler one in which the initial value of the wave-function is supposed to have spatial derivatives and a more complex formula, due to Hadamard, in which this requirement is unnecessary. The author finally applies the analysis to electromagnetic fields and potentials, considering both point charges and continuous space distributions. The field of a charged surface moving parallel to itself is also obtained, the results being equivalent to those found by Schott with the aid of Fourier analysis.

H. Bateman (Pasadena).

Ertel, Hans: Zur hydrodynamischen Form der Wellenmechanik. Physik. Z. 38, 797—799 (1937).

Drückt man die Schrödingersche Wellenfunktion ψ in der Form $\psi = \alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} S}$ durch reelle Größen ψ, S aus, so kann man die Schrödingergleichung in zwei reelle Gleichungen zerspalten, welche ihrer Form nach den hydrodynamischen Gleichungen analog sind. Diese bislang nur an der nichtrelativistischen Schrödingergleichung ausgeführte Umformung wird vom Verf. für die (spinfreie) relativistische Schrödingergleichung durchgeführt, wobei sich eine entsprechende Analogie zur relativistischen Hydrodynamik ergibt. Auch die entsprechende Gestalt des Energietensors wird entwickelt.

P. Jordan (Rostock).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

● Hamel, Georg: Integralgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch. Berlin: Julius Springer 1937. VIII, 166 S. u. 19 Abb. RM. 9.60.

Elementare Behandlung der Grundlagen der Theorie der Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen als einleitendes Material. Der erste Teil ist skizzenhaft, der zweite bringt Ergänzungen und Vertiefungen. Inhalt: Teil I. 1. Einleitendes. 2. Einfachste Schwingungsaufgaben führen auf eine lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern. 3. Zusammenhang mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. 4. Elementarer Teil der Theorie; die Neumannsche Reihe. 5. Beziehungen der Integralgleichungen zu den partiellen Differentialgleichungen der Physik. 6. Durchführung der Theorie für die symmetrischen Kerne. Teil II: 1. Lineare Integralgleichung erster Art. Die Gramsche Determinante. 2. Ausgeartete unsymmetrische Integralgleichung zweiter Art. 3. Fredholmsche Theorie. 4. Das Verfahren von Enskog. 5. E. Schmidts Theorie der unsymmetrischen Kerne. 6. Quellenmäßige Darstellbarkeit und Entwickelbarkeit. 7. Polare Integralgleichung. 8. Hilberts erster Weg zur Lösung linearer Integralgleichungen. 9. Methode der unendlich vielen Variablen. 10. Unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. 11. Die Mathiesche Gleichung. 12. Abelsche Integralgleichung. 13. Singuläre Kerne. Beispiele. 14. Integralgleichung aus der Theorie der Tragflügel. Die Integralgleichung von L. Foepppl. 15. Weitere Orthogonalsysteme und ihre Kerne. 16. Schwingungsproblem von Duffing. 17. Nichtlineare Integralgleichung.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Popovici, C.: Nouvelles solutions des équations de Volterra à limites périodiques. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 173—186 (1937).

The paper is concerned with formal methods for obtaining solutions of integral equations, of which the equation $u(x) + \int_x^{x_1(x)} A(x, s) u(s) ds = Q(x)$, or the corresponding equation of the first kind is an instance. It is assumed that for some finite value of n , the n -th iterate of the transformation $x_1(x)$ reduces to x . For equations of the first kind results are of the following type: If $A(x_1, s) = A(x, s)$ and $x_2(x) = x_1(x_1(x)) = x$ then a solution of $\int_0^x A(x, s) u(s) ds = X(x)$ gives a solution of $\int_x^{x_1(x)} A(x, s) u(s) ds = Q(x)$ provided $X(x_1) - X(x) = Q(x_1) - Q(x)$. The author erroneously claims to have shown that if $x_2(x) = x_1(x_1(x)) = x$ then a solution of $u(x) - \int_0^x [A(x, s) + A(x_1, s)] u(s) ds = Q(x) + F(x) + F(x_1(x))$, F any, is also a solution of $u(x) - \int_x^{x_1(x)} A(x, s) u(s) ds = Q(x)$. More complicated cases are considered.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Hostinský, B.: Sur une classe d'équations fonctionnelles. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 267—284 (1937).

L'équation

$$\Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, t) + \int_a^b \Psi(x, z, u, t) \Psi(z, y, s, u) dz \quad (1)$$

admet comme solution la fonction

$$\Psi(x, y, s, t) = K(x, y, t) + N(x, y, s) + \int_a^b K(x, z, t) N(z, y, s) dz,$$

où $K(x, y, u)$ est une fonction continue arbitraire de trois variables et $N(x, y, u)$ est le noyau résolvant de Fredholm correspondant. On peut réduire la solution de l'équation fonctionnelle de Hadamard à celle-ci de l'équation (1). *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Izumi, Shin-ichi, and Tatsuo Kawata: Quasi-analytic class and closure of $\{t^n\}$ in the interval $(-\infty, \infty)$. Tôhoku Math. J. 43, 267—273 (1937).

The authors prove for Fourier transforms a theorem analogous to that proved by Mandelbrojt for Fourier series [Série de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, 78 (1935); this Zbl. 13, 110]. Let $1 \leq q \leq 2$, $p(t)$ be differentiable and ≥ 0 in $(0, \infty)$ while $tp'(t) \uparrow \infty$ as $t \uparrow \infty$. Let C be a class of functions $f \in L_q(-\infty, \infty)$, indefinitely differentiable and such that p. p. $|F(x)| < Ae^{-p(|x|)}$ where $F(x)$ is

the Fourier transform of f and A an absolute constant. Then (*) $\int_1^\infty p(x) x^{-2} dx = \infty$

is necessary and sufficient that the class C be quasi-analytic. As a corollary it follows

that if $|g(x)| < Ae^{-p(|x|)}$ then (*) is necessary and sufficient that (**) $\int_{-\infty}^\infty g(x) x^n dx = 0$,

$n = 0, 1, 2, \dots$ implies $g(x) = 0$ p. p. Again, if $q(t) \geq A_0(1 + t^e)^{-1}$ in $(0, \infty)$,

$q(t) \downarrow 0$ as $t \uparrow \infty$ and $|g(t)| < Ae^{-tq(|t|)}$ then $\int_1^\infty q(t) t^{-1} dt = \infty$ is necessary and sufficient that (**) implies $g(x) = 0$ p. p. ¹ *J. T. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Biggeri, Carlos: Sur les singularités des intégrales de Laplace. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 600—603 (1937).

The author proves the following generalization of a theorem of Landau: If the argument of the complex valued function $a(t)$ has a derivative which is $o(t)$, then the abscissae of convergence and of absolute convergence of the Laplace integral

$F(z) = \int_0^\infty a(t) \exp(-tz) dt$ coincide and the real point of the line of convergence is

a singular point of $F(z)$.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Florin, H.: On Boole's operators in the calculus of finite differences. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 492—502 (1937).

The essential results of this paper are contained in the following statements:

1) If $u(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(z) dz}{z\Gamma(x-z+1)}$ then

$$\pi u(x) \equiv x\{u(x) - u(x-1)\} = \frac{\Gamma(x+1)}{2\pi i} \int_C \frac{z\Phi(z) dz}{z\Gamma(x-z+1)}$$

so that the difference operator π is translated into multiplication of $\Phi(z)$ by z .

2) $\varrho^m u(x) \equiv \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-m+1)} u(x-m) = \frac{\Gamma(x+1)}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(z-m) dz}{(z-m)\Gamma(x-z+1)}$. The function

$\Phi(z)$ is supposed to have no other singularities in the finite part of the complex plane than a finite number of poles, and the contour C encloses all poles in the finite part of the plane. The transformation $\Phi(z) \rightarrow u(x)$ plays in certain difference equations a rôle similar to that played by the Laplace transformation in Heaviside's operational calculus.

Murnaghan (Baltimore).

Funktionentheorie:

● **Bourion, Georges:** L'ultraconvergence dans les séries de Taylor. (*Actualités scient. et industr.* Nr. 472. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. VIII.) Paris: Hermann & Cie. 1937. 47 pag. Frs. 12.—.

This is more than a mere collection of facts as the author's methods [*Ann. École norm.* 50, 245—318 (1933); this *Zbl.* 8, 62 and *Compositio Math.* 1, 163—176 (1934); this *Zbl.* 8, 253] have given cohesion to the subject and he is able to provide complete proofs of most of the known results. The parallel theory of the distribution of the zeros of sequences of partial sums of power series (of finite radius of convergence) is also treated fully.

Macintyre (Aberdeen).

Valiron, Georges: Sur un critère de famille normale. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 205, 890—892 (1937).

Reguläre Funktionen, die in einem Gebiet keine Nullstellen besitzen und deren k -te Ableitungen (k feste Zahl) in den 1-Stellen der Funktion gleichmäßig beschränkt sind, bilden dort eine normale Schar. Dieses Normalitätskriterium führt Verf. auf einen Satz von Ahlfors [*Acta Soc. Sci. Fennicae* 2, 1—17 (1926)] zurück, wonach bei vier vorgegebenen, sich nicht überdeckenden Kreisen die für $|z| < 1$ reguläre Funktion $g(z)$ eine nur von $|g(0)|$, von $|z|$ und von der Lage der Kreise abhängige obere Schranke besitzt, wenn kein Zweig ihrer Umkehrfunktion in einem der Kreise regulär ist

Pfluger (Solothurn).

Wilson, R.: Functions with dominant singularities of the generalized algebraic-logarithmic type. II. On the order of the Hadamard product. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 43, 417—438 (1937).

Dans un mémoire précédent (voir ce *Zbl.* 15, 216), l'aut. utilisant des résultats de Jungen (voir ce *Zbl.* 3, 119) et la notion de poids d'une singularité algébrique-logarithmique, a défini les singularités dominantes algébrique-logarithmiques de poids (σ, k) . Il introduit ici ces notions dans l'étude du théorème d'Hadamard sur la multiplication des singularités et apporte des compléments à des théorèmes de Borel, Faber, Jungen, Pólya (voir not. Pólya, ce *Zbl.* 8, 62). Il montre d'abord que, si $f(z) = \sum a_n z^n$, $g(z) = \sum b_n z^n$, $h(z) = \sum a_n b_n z^n$ ont un rayon de convergence fini non nul et si $f(z)$ et $g(z)$ ont une seule singularité qui est du type alg. log. en α et β respectivement, de poids respectifs (σ_1, k_1) , (σ_2, k_2) , $h(z)$ a une seule singularité, qui est de même espèce et de poids $(\sigma_1 + \sigma_2 - 1, k_1 + k_2)$ au point $\alpha\beta$ (on suppose en outre que, ou bien en α et β , il y a un seul élément dominant, ou bien que l'une au moins des sing. α, β est du type général). Pour passer au cas des fonctions f et g admettant plusieurs singularités, l'aut. emploie le procédé de décomposition de Pólya. Il montre que: Si f et g ont

seulement des singularités isolées α_μ, β_ν ($\mu = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots$) respectivement, toutes situées aux sommets des étoiles qu'elles définissent, si, en un couple α_μ, β_ν , ces singularités sont alg. log. de poids $(\sigma_1, k_1), (\sigma_2, k_2)$ et si le point $\alpha_\mu \beta_\nu$ s'obtient une seule fois par multiplication des α_i et β_j , ce point est sing. alg. log. de $h(z)$, de poids $(\sigma_1 + \sigma_2 - 1, k_1 + k_2)$. L'aut. étudie ensuite le cas où f et g ont sur le cercle de convergence des sing. dominantes du type alg. log. et donne un résultat analogue au précédent; il étudie enfin, suivant Pólya, comment la distribution des coefficients dominants dans f et g détermine celle des coefficients de $h(z)$. *G. Valiron* (Paris).

Rauch, Armand: Sur certaines fonctions entières d'ordre $\rho < 1/2$. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 954—956 (1937).

A partir d'inégalités de Valiron (voir ce Zbl. 3, 263), l'aut. donne des propriétés des fonctions entières $f(z)$ de la classe de divergence de l'ordre positif $\rho, \rho < 1/2$, pour

lesquelles $\lim_{k \rightarrow \infty} [J(\pi, k)/J(0, k)] = \cos \pi \rho$ si $J(\varphi, k) = \int_1^\infty r^{-k-1} \log^+ |f(re^{i\varphi})| dr, k > \rho$.

Il montre que, pour ces fonctions, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} [J(\varphi, k)/J(0, k)] = \cos \rho \varphi$; que, si $a_n(x)$ est le $n^{\text{ème}}$ zéro de $f(z) - x$ et si $S(k, x)$ et $S'(k, x)$ sont respectivement les sommes des séries $\sum |a_n(x)|^{-k}, k > \rho$, étendues aux zéros $a_n(x)$ situés dans les angles $|\varphi - \pi| < \varepsilon$,

et $|\varphi| < \pi - \varepsilon$, on a aussi: $\lim_{k \rightarrow \infty} [S'(k, x)/J(0, k)] = 0, \frac{\rho}{\pi} \sin \rho \pi \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [S(k, x)/J(0, k)] \leq \frac{\rho}{\pi} \sin \rho \pi \frac{\sin \pi \rho}{\sin \rho(\pi - \varepsilon)}$, sauf pour un ensemble de valeurs x de mesure linéaire nulle.

Ces propriétés, qui s'étendent aux algébroides et fournissent des résultats pour une classe de fonctions d'ordre infini, permettent aussi de retrouver les propositions concernant les fonctions d'ordre supérieur à $1/2$ (voir Rauch, ce Zbl. 15, 31). *Valiron*.

Iyer, V. Ganapathy: On effective sets of points in relation to integral functions. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 358—365 (1937).

ρ est supposé donné, positif, fini. Si $f(z)$ est une fonction entière, si $M(r, f) = \max. |f(re^{i\varphi})|$ et si $\lim_{r \rightarrow \infty} [r^{-\rho} \log M(r, f)] = k(f) < +\infty$, l'aut. dit qu'une suite $z_n, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$, est une suite effective pour $f(z)$ si $k(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} [|z_n|^{-\rho} \log |f(z_n)|]$ (*).

Cherchant à construire de telles suites valables pour toutes les fonctions d'ordre ρ au plus lorsque $k(f) < \infty$, l'aut. donne des conditions nécessaires, puis, au moyen de la formule d'interpolation de Lagrange, établit cette condition suffisante: I. Si les z_n sont d'ordre ρ , s'il existe une fonction entière $g(z)$ les admettant pour zéros simples pour laquelle: $\lim_{n \rightarrow \infty} [|z_n|^{-\rho} \log |g'(z_n)|] = d > 0$ (**); $\lim [|z|^{-\rho} \log |g(z)|] = d$ si $z \rightarrow \infty$

à l'extérieur des cercles Γ_n d'équation $|z - z_n| < |z_n|^{-h}, h > \rho$ (***), on a $k(g) = d$ et la suite z_n est effective pour les $f(z)$ telles que $k(f) < d$. En vue des applications, l'aut. cherche ensuite si la condition (***) entraîne (**). Il énonce que: II. Il en est ainsi lorsque le nombre des points z_n contenus dans l'un quelconque des domaines connexes formés par les Γ_n reste inférieur à un nombre fixe. La démonstration n'est pas probante (voir le bas de la page 362), à moins que les cercles Γ_n soient extérieurs les uns aux autres pour n assez grand. C'est ce qui a lieu dans le cas particulier en-

visagé par l'aut.: $g_1(z) = \prod_{n=1}^\infty (1 - z^n n^{-\alpha_n}), k(g_1) = \frac{\alpha}{4}$; il s'ensuit donc bien que si

$k(f) < d$, il est déterminé par (*) avec $z_n = (2\rho d)^{-1/\rho} p^{2/\rho} e^{2i\pi q/p}, p = 1, 2, \dots, q = 0, 1, \dots, p-1$. Un corollaire relatif au cas où $k(f) = 0$ (th. 4, p. 364) est contenu dans un résultat du Réf. (voir ce Zbl. 15, 307). L'aut. signale enfin que la prop. I permet d'étendre ses résultats relatifs à la constance des fonctions bornées en certains points (voir ce Zbl. 15, 164). [Note du Réf. Le problème soulevé par l'aut.: (***) entraîne-t-il toujours (**)? se résout par la négative; la condition (***) n'est pas incompatible avec l'existence de ce que Borel a appelé les distributions extraordinaires

de zéros (Leçons sur les fonctions méromorphes, p. 100—104). Exemple:

$$g(z) = g_1(z) \prod_1^{\infty} [1 - (ze^{-n^3} + 1)n^{-\alpha})^n].$$

G. Valiron (Paris).

Cartwright, M. L.: On the level curves of integral and meromorphic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 468—474 (1937).

J. M. Whittaker avait énoncé comme probable que: si deux fonctions entières $f(z)$ et $g(z)$ ont respectivement leur module constant sur une même courbe fermée, on a $f(z) \equiv K[g(z)]^\alpha$, K et α constants, $\alpha > 0$ (voir Pennycuik, ce Zbl. 15, 165). La proposition est exacte sauf pour certaines classes de fonctions (voir Valiron, ce Zbl. 15, 359). L'aut. donne une nouvelle démonstration qui lui fournit aussi des résultats pour les fonctions méromorphes. Γ étant une courbe simple fermée, soit $C(m)$ l'ensemble des fonctions méromorphes $f(z)$ telles que $|f(z)| = 1$ sur Γ . L'aut. montre que: si a est intérieur à Γ et si $w(z, a)$ est une fonction de $C(m)$ qui s'annule pour $z = a$ et qui a dans Γ le nombre total minimum de zéros et de pôles, toute autre fonction $f(z)$ de $C(m)$ qui s'annule pour $z = a$ est divisible par $w(z, a)$ [$f(z)$ admet pour zéros et pôles ceux de $w(z, a)$ avec des ordres au moins égaux]. En particulier, si $f(z)$ a les mêmes zéros et pôles que $w(z, a)$ dans Γ , on a $f(z) \equiv e^{i\lambda} w(z, a)$, λ réel. Si b est un autre point intérieur à Γ , on a

$$w(z, b) = \frac{w(z, a) - w(b, a)}{1 - \overline{w(b, a)} w(z, a)}.$$

L'aut. déduit de là le résultat de Valiron relatif aux fonctions entières, et, pour les fonctions méromorphes, celui-ci: Toute fonction $f(z)$ de l'ensemble $C(m)$ est de la forme

$$f(z) \equiv e^{i\lambda} \prod_1^N [w(z, a_r)]^{\mu_r}$$

les a_r sont les zéros et pôles de $f(z)$ dans Γ , les μ_r des entiers positifs ou négatifs, λ est réel. L'aut. donne des conséquences relatives aux chemins de détermination et aux valeurs asymptotiques des fonctions de $C(m)$.

G. Valiron (Paris).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Copeland, Arthur H.: Consistency of the conditions determining Kollektivs. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 333—357 (1937).

Neuer Ansatz, die Widerspruchsfreiheit des von Misesschen Kollektivbegriffes durch Einengung der zugelassenen Auswahlverfahren zu retten. Der Merkmalraum besteht aus dem Einheitswürfel eines endlich oder unendlichdimensionalen Euklidischen Raumes; Wahrscheinlichkeiten sind von vornherein definiert, und zwar nur für die Mengen Γ mit Inhalt im Peano-Jordanschen Sinne und durch eine beliebige, auf diesem Mengenkörper absolut additive (nichtnegative und normierte) Mengenfunktion $W(\Gamma)$. Die Operation der Auswahl definiert Verf. so, daß eine feste monotone Folge natürlicher Zahlen $\{k_n\}$ gegeben ist und dann zu einer beliebigen Merkmalfolge $\{P_n\}$ die Teilfolge $\{P_{k_n}\}$ gebildet wird. Bewiesen wird: Zu jedem vorgegebenen System von abzählbar vielen Auswahlen gibt es kontinuumviele Kollektive, d. h. Merkmalfolgen der Eigenschaft, daß in jeder der abzählbar vielen zugelassenen Teilfolgen $\{P_{k_n}\}$ die relative Häufigkeit des Vorkommens einer Menge Γ im Anfangsabschnitt der Länge N für $N \rightarrow \infty$ gegen $W(\Gamma)$ strebt. [Ref. möchte darauf hinweisen, daß dasselbe Problem kürzlich auch von A. Wald gelöst wurde (dies. Zbl. 16, 408 f., S. 409 Z. 2 v. o. bittet Ref. $i_k - 1$ statt i_k zu lesen). Dabei definiert Wald die Auswahl allgemeiner, indem es von den $n - 1$ ersten Gliedern der Merkmalfolge selbst abhängen darf, ob das n -te „gewählt“ wird. Auch der zugelassene Merkmalraum ist bei Wald etwas allgemeiner.]

W. Feller (Stockholm).

Kozakiewicz, W.: Sur les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence stochastique. C. R. Acad. Sci., Paris **205**, 1028—1029 (1937).

Die x_n und x seien eindimensionale stochastische Veränderliche, $F_n(x, y)$ bzw. $F_{n,m}(x, y)$ die Verteilungsfunktionen der zweidimensionalen Veränderlichen (x_n, x) bzw. (x_n, x_m) , schließlich $F(x)$ diejenige von x . Verf. konstatiert, daß x_n dann und nur dann nach Wahrscheinlichkeit gegen x strebt, wenn $F_n(x, x) \rightarrow F(x)$ oder $F_{n,m}(x, x) \rightarrow F(x)$. W. Feller (Stockholm).

Doebelin, Wolfgang, et Robert Fortet: Sur deux notes de MM. Kryloff et Bogoliouboff. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1699—1701 (1937).

Nous conservons les notations de la Note de Kryloff et Bogoliouboff (voir ce Zbl. **16**, 312). On peut représenter les probabilités itérées $P(x, E)$ par la formule

$$P^{(n)}(x, E) = \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^n \left[\sum \varphi_k^{(i)}(x) \int P(y, E) d m_k^{(i)} \right] + R^{(n)}(x, E),$$

où $R^{(n)}(x, E)$ tend vers 0 exponentiellement. On peut partager chaque ensemble invariant E_k en un nombre fini $d(k)$ des sous-ensembles „cycliques“ $E_k^{(1)}, E_k^{(2)}, \dots, E_k^{(d(k))}$. Pour $x \in E_k^{(r)}$ on a $P(x, E_k^{(r+1)}) = 1$, où l'on remplace $r+1$ par 1 dans le cas $r = d(k)$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Elfvig, Gustav: Zur Theorie der Markoffschen Ketten. Acta Soc. Sci. Fennicae, N. s. **2**, Nr 8, 1—17 (1937).

Verf. behandelt zwei verschiedene Probleme. 1. Unter welchen Bedingungen eine diskrete Markoffsche Kette mittels eines nach der Zeit stetigen Markoffschen Prozesses sich interpolieren läßt. Es ergibt sich dabei, daß diese Interpolationsaufgabe höchstens endlich viele Lösungen hat. 2. Unter welchen Bedingungen bei den gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ik}(t)$ und absoluten Wahrscheinlichkeiten $Q_i(0)$ für den Anfangsmoment $t = 0$ auch die absoluten Wahrscheinlichkeiten $Q_i(t)$ für $t < 0$ sich bestimmen lassen.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Jeffreys, Harold: The tests for sampling differences and contingency. Proc. roy. Soc. London A **162**, 479—495 (1937).

The author points out that the sampling problem for two properties in which separate samples are taken from the two populations which respectively do and do not display the first given property, is to be distinguished from the contingency problem in which a single large class is selected at random containing all four types in proportions not subject to prearrangement. In the latter case one must revise the tests for association to take account of the prior question: how common are the properties being investigated? To obtain compact methods approximations are introduced early, and a brief table is obtained for testing an even chance when the sample is small. The revision of prior tests reopens the question of significance tests in general. Former methods yield the extreme cases of complete proportionality and of complete independence. These while decisive may be viewed as rare. For quantitative use, Ockham's rule may be revised to read "Variation is to be taken as random until the contrary is shown; and new parameters expressing systematic differences, when they are suggested, must be tested one at a time unless there is specific reason to the contrary". Comments on Bayes' rule and on practical difficulties in estimating the relevance of prior information, and in inferring the number of free parameters, concludes the paper.

Albert A. Bennett (Providence).

Brelot, M.: Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique. J. Math. pures appl., IX. s. **16**, 285—306 (1937).

Es seien x_1, x_2, \dots, x_n unabhängige zufällige Größen und a_1, a_2, \dots, a_n die entsprechenden mathematischen Erwartungen. Es werden die Abweichungen

$$\Delta = \sigma' - \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \frac{\sum x_i}{n})^2} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum (a_i - \frac{\sum a_i}{n})^2}$$

untersucht. Wenn alle Größen x_i der Gaußschen Verteilung mit der Streuung s unterliegen, so beweist man für die Wahrscheinlichkeiten $P(\lambda, n) = P(|\Delta| < \lambda)$ folgendes: mit $n \rightarrow +\infty$ konvergiert $P(\lambda, n)$ gegen 1, wenn $\lambda > \sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma$, gegen $\frac{1}{2}$, wenn $\lambda = \sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma$ und gegen 0, wenn $\lambda < \sqrt{\sigma^2 + s^2} - \sigma$. A. Kolmogoroff (Moskau).

Numerische und graphische Methoden.

Caro, Victor E.: Mathematische Notizen. Rev. Acad. colomb. Ci. exact. etc. 1, 71—73 (1936) [Spanisch].

Spezialfälle der Newtonschen Regel nebst einem Teil eines Satzes von Bonnet [s. A. Ostrowski, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 37, 254 (1928), und die dort und bei Netto angegebene Literatur]. Th. Motzkin (Jerusalem).

Banachiewicz, T.: Sur la résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 350—354.

Die Koeffizientenmatrix M wird durch Unterteilung in eine Matrix M_1 von Matrizen verwandelt. Daraus ergeben sich zwei Methoden der Gleichungsauflösung: Die eine, die durch sukzessive Ränderung eine Folge von Matrizen immer höherer Ordnung herstellt, deren letzte dann die Reziproke der gegebenen Matrix M ist. Und eine zweite, die M_1 durch Multiplikation mit einer Folge von gewissen Matrizen überführt in eine gleichgebauete Matrix, deren Elemente (Matrizen) unterhalb der Diagonalen verschwinden (Verallgemeinerung einer Methode von Helmert bei symmetrischen Matrizen).

Bodewig (Basel).

Kaczmarz, S.: Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 355—357.

Die Methode macht keine Voraussetzungen über die Gleichungsmatrix und den Anfangswert der x . Geometrisch besteht sie aus der zyklischen Projektion eines beliebigen Ausgangspunktes auf die Hyperebenen des Systems. Zur Konvergenz des Verfahrens braucht nicht die Quadratsumme der Koordinaten jeder Hyperebene gleich 1 zu sein, es genügt, daß sie < 2 .

Bodewig (Basel).

Stankiewicz, L.: Sur les opérations arithmétiques dans le calcul des inverses d'après la méthode de M. T. Banachiewicz. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 363—376.

Verf. bestimmt die Anzahl der zur Bildung einer Matrix notwendigen Operationen bei der Methode von Gauß und der von Banachiewicz: Die Zahl der Multiplikationen (Divisionen) ist bei beiden die gleiche, nämlich n^3 ; hingegen ist die Zahl der Additionen bei der zweiten Methode wesentlich geringer.

Bodewig (Basel).

Pflanz, E.: Über die Bildung finiter Ausdrücke für die Lösung linearer Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 17, 296—300 (1937).

Eine vom Ref. gegebene Formel (Schr. d. math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin 3, H. 1; vgl. dies. Zbl. 11, 302), die explizit finite Ausdrücke höherer Annäherung für die erste und zweite Ableitung einer Funktion $u(x)$ liefert, wird vom Verf. auf höhere Ableitungen verallgemeinert; er gibt explizit für die m -te Ableitung $u^{(m)}(0)$ einen finiten Ausdruck (eine Linearkombination der Werte von $u(x)$ an den Stellen $x_\mu = \mu \cdot h$ mit $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p$) von beliebig vorgegebenem Annäherungsgrad. In den beiden Fällen, daß m gerade ist oder nicht, ergeben sich Formeln verschiedenen Aussehens. Auch Restgliedsabschätzungen werden durchgeführt.

Collatz (Karlsruhe).

Rohrberg, Albert: Erhöhung der Ablesegenauigkeit bei den trigonometrischen Teilungen der Rechenstäbe. Z. Instrumentenkde 57, 455—457 (1937).

Werkmeister, P.: Ein neues Instrument zur Bestimmung der Richtungswinkel von Kurventangenten. Z. Instrumentenkde 57, 379—380 (1937).

Das Spiegellupenderivimeter von A. Ott besteht aus einem halbkreisförmigen Winkelmesser von 14 cm \varnothing mit einer Visolettlupe im Drehpunkt des Einstellarmes.

Beschreibung der Handhabung und Genauigkeitsuntersuchung ($\pm 0,2^\circ$ mittlerer Fehler für den Tangentenrichtungswinkel). *Gumz* (Heidelberg).^{oo}

Nyström, E. J.: Über den Gebrauch des harmonischen Analysators Mader-Ott. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 9, Nr 14, 1—10 (1937).

Der Anwendungsbereich des harmonischen Analysators Mader-Ott wird erweitert. Bei zu großen Ordinaten $y = f(x)$ der zu analysierenden Funktion wird eine bequeme Zerlegung von $f(x)$ in zwei Summanden empfohlen. Hat man für hohe Fourierkoeffizienten nicht die entsprechenden Zahnräder, so kann man sich durch Unterteilung des Periodenintervalls helfen; die Teilkoeffizienten werden linear, beim Vorschlag des Verf. in bes. einfacher Weise, zum gesuchten Koeffizienten zusammengesetzt. Ähnlich geht man bei zu langer Periode vor. *Theodor Zech* (Darmstadt).

● **Peters, J.:** Sechsstellige Werte der Kreis- und Evolventen-Funktionen von Hundertstel zu Hundertstel des Grades nebst einigen Hilfstafeln für die Zahnradtechnik. Berlin u. Bonn: Ferd. Dümmler 1937. VIII, 217 S. geb. RM. 20.—.

Die vorliegende Tafel enthält nebeneinander Werte der trigonometrischen Funktionen und von zwei sog. Evolventenfunktionen. Die erste dieser Evolventenfunktionen, $\text{ev}\beta$ („evolvens“), vermittelt eine Polarkoordinatendarstellung für die Evolvente des Einheitskreises; sie gibt den Fahrstrahl f als Funktion des Polarwinkels β . Zur Erklärung der zweiten Funktion denke man sich die Evolvente des Einheitskreises durch Fadenabwicklung erzeugt; die Funktion $\text{inv}\alpha$ („involut“) gibt den Polarwinkel β als Funktion desjenigen Winkels α , unter dem der gestreckte Teil des Fadens vom Mittelpunkt aus erscheint. Bedürfnis für diese Funktionen besteht in erster Linie in der Zahnradtechnik. Sie wurden auf Vorschlag von W. Vogel, Werkzeugmasch. 40, 225 (1936), eingeführt. Das Tafelwerk enthält auf einer Zeile jeweils zusammengehörige Werte von α und β , und zwar in Grad- und Bogenmaß, ferner die Werte von $\text{inv}\alpha$, $\sec\alpha = \text{ev}\beta$, $\text{cosec}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tg\alpha$, $\ctg\alpha$, von hundertstel zu hundertstel Grad. Die im Titel genannten Hilfstafeln für die Zahnradtechnik geben: genormte Modulwerte nebst üblichen Zwischenwerten, Vieleckstafel, Formelübersicht, Grunddicken- und Grundlückenhalfwinkel, Hilfswerte zur Wildhabermessung und Verwandlungstafeln verschiedener Winkelmaße ineinander. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Geometrie.

Cavallaro, Vincenzo G.: Nouvelles formules pour l'approche construction de séries, des côtés de polygones réguliers supérieurs, des racines des équations transcendantes très remarquables. An. Fac. Ci. Pôrto 22, 134—144 (1937).

Wiedemann, B.: Algebraisch-geometrische Untersuchungen über Konstruktionsmöglichkeiten auf der Kugel. Deutsche Math. 2, 520—544 (1937).

Im Mittelpunkt der Arbeit steht die von Heussel gestellte Aufgabe [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 32, 19 (1923): „Auf einer Kugelfläche ist allein mit dem Zirkel ein Großkreis zu zeichnen.“ Es wird gezeigt, daß sie im allgemeinen unlösbar ist. Dieser Nachweis wird in folgende Teilnachweise aufgespalten. 1) Es werden zuerst folgende Aufgaben 1—6 über Konstruktionen mit dem Zirkel allein gelöst. Sie werden ihrerseits als parameterabhängige und „parameterfreie“ Konstruktionen unterschieden. Dabei werden in diesem Zusammenhang unter „Parametern“ gewisse willkürliche (Konstruktions-) Größen verstanden, von deren Wahl das (Konstruktions-) Ergebnis unabhängig ist. Die genannten Aufgaben sind die folgenden: 1. Zu einem Punkt D den Spiegelpunkt D' bezüglich des durch zwei Punkte A, B bestimmten Großkreises (A, B) zu finden. 2. Zu zwei Punkten eines (A, B) beliebig viele weitere Punkte von (A, B) zu ermitteln. 3. Einen (A, B) -Bogen zu verdoppeln (Lösung von Heussel). 4. Einen (A, B) -Bogen zu ver- n -fachen ($n > 0$, ganz). 5. Sei AB eine gegebene Großkreisbogensehne. Wie erhält man auf der Kugel ohne Benutzung von Parametern weitere Größen? (Lösung: Über AB werden die beiden gleichseitigen Dreiecke ABC ,

ABC' konstruiert. Dann ist CC' die erste neue Größe; Ausnahmefall $C \equiv C'$.) 6. Wie gewinnt man aus den neuen Größen CC' und $C \equiv C'$ weitere? (Lösung: Es werden alle möglichen der Kugel einbeschriebenen Tetraeder konstruiert, von denen dann im allgemeinen je eine Kante eine weitere neue Größe liefert.) — 2) Aus der Totallösung der Aufgabe 6. wird dann die bekannte Kosinusrelation vektoriell abgeleitet. In ihrer Auffassung als Gleichung führt sie bei vollständiger Diskussion zu (Größen-) Hauptbereich der fünf (regulären) Platonischen Körper. Dabei ist mit Rücksicht auf die obige Hauptaufgabe bemerkenswert, daß dieselbe lösbar ist, wenn die vorgeschriebene Zirkelspanne gleich der Kante des der Kugel einbeschriebenen Ikosaeders oder Tetraeders ist. — 3) Jetzt wird der Unmöglichkeitbeweis für die allgemeine Lösung der Hauptaufgabe gegeben. (Diesen Nachweis hat im wesentlichen schon T. Bonnesen in seiner 1899 erschienenen Arbeit: Geometrische Konstruktion der Kugelflächen, Nyt. Tidsskr. Math. 10 B, 1—13, 25—35, erbracht. Vgl. auch D. Fog, Mat. Tidsskr. A 1935, 16—24. Beide Arbeiten scheint Verf. nicht gekannt zu haben.) Ihm zufolge kann man also $\pi/2$ im allgemeinen aus einem vorgegebenen Hauptbogen α auf der Kugel nicht finden, und daher sind auch eine Reihe von Fundamentalaufgaben unlösbar (z. B. ist es im allgemeinen nicht möglich, einen beliebigen Hauptbogen α zu halbieren). — 4) Will man sie lösbar machen, so muß man eine der beiden folgenden (einander äquivalenten) Forderungen I („Der Kugelgeometer besitzt die Zirkelspanne für den Hauptbogen $\pi/2$ “) oder II („Dem Kugelgeometer sind auf der Kugel zwei Gegenpunkte gegeben“) als erfüllt (Konstruktionsmittel) zulassen. Dann können damit die folgenden 20 Fundamentalaufgaben gelöst werden: 1) zu einem gegebenen Großkreis (A, B) die beiden Pole zu bestimmen; 2) Konstruktion des Dreiecks ABC ; 3) unter Benutzung von I zu einem gegebenen Punkt P den Gegenpunkt P' zu ermitteln (also II als erfüllt nachzuweisen); 4) von einem gegebenen Punkt P das Lot auf einen gegebenen Großkreis (A, B) zu fällen (Orthogonalkreis); 5) in einem auf einem Großkreise G liegenden Punkt P die Senkrechte auf diesen zu errichten; 6) Errichtung des Mittellots, Bogenhalbierung von AB ; 7) den Winkel von zwei gezeichneten Großkreisen zu halbieren; 8) Addition und Subtraktion von Hauptbogen AB und CD ; 9) Addition und Subtraktion von Winkeln von gezeichnet vorliegenden Großkreisen; 10) den Kreis durch drei gegebene Punkte der Kugel zu legen. — Auf der Kugel seien die Sehnen s_1, s_2, \dots, s_n bekannt. Dann sind die folgenden Ausdrücke x zu konstruieren: 11) $x = s_1 + s_2$; 12) $x = s_1 - s_2$; 13) $x = s_1/m$ ($m > 0$, ganz); 14) $x = n \cdot s_1$ ($n > 0$, ganz); 15) $x = s_1 \cdot s_2/s_3$; 16) $x = s_1^2/s_2$; 17) $x = \sqrt{s_1 \cdot s_2}$; 18) $x = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$; 19) $x = \sqrt{s_1^2 - s_2^2}$; 20) $x = \sqrt{m s_1}$. — 5) Im Anschluß an diese 20 Grundaufgaben, deren Lösung die Vollständigkeit der Mohr-Mascheronischen Kugelgeometrie erzwingen soll (der Vollständigkeitsbeweis wird in der Arbeit allerdings nicht erbracht), werden die fünf Kugelteilungen entwickelt (die Tetraederteilung nach Böhmer) und als Abschluß Konstruktionen besprochen, die durch Vorgabe eines Großkreises möglich werden. — Die der Arbeit beigegebenen Abbildungen sind ganz schematisch. In der obengenannten Arbeit von T. Bonnesen sind auch eine Fülle von Aufgaben behandelt.

Steck (München).

Mayer, Anton E.: Koppelkurven mit drei Spitzen und spezielle Koppelkurven-Büschel. Math. Z. 43, 389—445 (1937).

Ausführliche Arbeit über besondere Koppelkurven in elementargeometrischer Behandlung, wo neben neuen Ergebnissen auch bekannte Sätze neu bewiesen werden. Eine Koppelkurve Γ mit drei Spitzen S_i ($i = 1, 2, 3$) wird von einem Getriebe erzeugt, das einmal folgende Stellung einnimmt: Die Endpunkte der Koppel liegen auf dem Kreise, dessen Durchmesser der Steg ist. Sucht man in dieser Stellung den Schnitt der Arme, so erhält man den Punkt, der Γ erzeugt. Die Brennpunkte F_i von Γ und die Spitzen S_i liegen auf einem Feuerbachschen Kreis. In der Figur $F_i S_i$ gibt es zahlreiche dreiecksgeometrische Beziehungen. Γ liegt in einem der Quadranten der pro-

jektiven Ebene, die von den Seiten s_i des Dreiecks S_i begrenzt sind, und berührt die in den übrigen Quadranten befindlichen Berührungskreise sowie die um F_i durch S_i gezogenen Kreise k_i . Die Spitzentangenten gehen durch einen Punkt, den im Quadranten von Γ liegenden Nagelschen Punkt von S_i . Zu vorgegebenen Spitzen S_i gibt es vier Koppelkurven, deren Brennpunkte und erzeugenden zwölf Koppelgetriebe teilweise übereinstimmen. Γ kann auch rational sein und hat dann noch in der Inkreismitte von S_i einen Doppelpunkt. Für die Getriebe rationaler Kurven wird eine Konstruktion und ein Nomogramm gegeben, in dem eine besondere Kubik als Hilfskurve auftritt. Konstruktiv verwertbar ist die Einbettung jeder allgemeinen Koppelkurve in ein Büschel von Koppelkurven mit festen Brennpunkten F_i und festen Doppelpunkten S_i (vgl. dies. Zbl. 17, 28). Das Büschel schneidet auf jedem Kreis durch zwei Doppelpunkte und auf jeder Seite s_i eine symmetrische Involution aus. Involutionsen entstehen noch auf den Kreisen um die Brennpunkte und durch die Doppelpunkte. Mittels der Büschelkurven als Bezugslinien sind diese Involutionsen projektiv aufeinander bezogen. Auf den Seiten s_i wird diese Beziehung eine Kongruenz, wenn es im Büschel eine dreispitzige Kurve gibt. Zugleich liegen die Involutionsen auf s_i und k_i perspektiv, eine Büschelkurve zerfällt in drei Kreise. Anwendung auf die triangulärsymmetrische Kurve, deren sehr geringe Abweichung vom gleichseitigen Dreieck berechnet wird. Hervorzuheben sind die reichen Literaturangaben über Koppelkurven. Eckhart (Wien).

Rössler, Fred: Geometrische Grundlagen der Konstruktion von Helligkeitsgleichen für eine neue Helligkeitshypothese. *Mh. Math. Phys.* 46, 157—171 (1937).

Die konstruktive Behandlung der scheinbaren Helligkeit krummer Flächen wurde bisher bloß auf Grund der Hypothese $h = \cos \lambda \cos \sigma$ für die Helligkeit eines Flächenelementes behandelt, wobei λ und σ die Winkel des Licht- bzw. des Sehstrahls gegen die Normale des Flächenelementes bedeuten. Durch $h = \text{konst.}$ werden auf einer Fläche die Isophengen definiert. Besonderes Interesse haben die Konstruktionen von Isophengen nicht gefunden. Sie sind nicht einfach genug, und ihre Hypothese entspricht nur mangelhaft der Wirklichkeit. In der vorliegenden Arbeit wird die obige hypothetische Formel durch eine andere $h = \frac{\cos \lambda}{2 - \cos \sigma}$ ersetzt. Der Verf. nennt die durch sie bestimmten Kurven gleicher scheinbarer Helligkeit Isophanen. Es zeigt sich, daß die Isophanen gewissermaßen ein Mittelding zwischen den Isophengen und den Isophoten, den Kurven gleicher wirklicher Helligkeit sind. Die neue Helligkeitshypothese, obwohl zunächst willkürlich und kompliziert anmutend, liefert in der konstruktiven Durchführung das überraschende Ergebnis, daß die Isophanenkonstruktionen weitgehende Ähnlichkeiten mit den Konstruktionen der Isophoten besitzen und ungleich einfacher als die Isophengenkonstruktionen sind. Die Arbeit behandelt die Konstruktion für alle einer einfachen konstruktiven Behandlung zugänglichen Flächenarten. — Leider sind in den schönen Isophanenbildern der Schraubrohrfläche (Fig. 6) die Ecken im Schlagschatten irrtümlich. E. Kruppa (Wien).

Kruppa, Erwin: Darstellende Geometrie der Hermiteschen Ebene. *S.-B. Akad. Wiss. Wien* 146, 99—114 (1937).

Dem Punkte $\mathfrak{P}(u = x_1 + ix_2, v = x_3 + ix_4)$ der komplexen Ebene ε wird zuerst der reelle Punkt $P(x_1 x_2 x_3 x_4)$ eines R_4 zugeordnet und dieser weiter in bekannter Weise durch die Bildpunkte $P'(x_1 x_2)$ und $P''(x_3 x_4)$ in der Zeichenebene dargestellt. Damit erhält man eine anschauliche darstellend-geometrische Behandlung der komplexen Ebene, bei der noch ein praktischer Konstruktionsbehelf (die sog. Achsentransformation) verwendet wird. Das Bild einer Geraden von ε ist im R_4 eine (synek-tische) Ebene, die sich in der Zeichenebene als gleichsinnige Ähnlichkeit abbildet; damit kann man die Verknüpfungsoperationen zeichnerisch verfolgen. Den eindimensionalen Ketten entsprechen im R_4 Kreise, deren Bilder Kreispaaire sind. Hauptsächlich werden jene Kollineationen und Antikollineationen von ε untersucht, die das Hermite-

sche Entfernungsquadrat zweier Punkte $(u - u')(\bar{u} - \bar{u}') + (v - v')(\bar{v} - \bar{v}')$ zur relativen bzw. absoluten Invariante haben (Ähnlichkeiten, Antiähnlichkeiten bzw. Bewegungen und Antibewegungen). Der Hermitesche Abstand zweier Punkte ist gleich dem euklidischen Abstand der Bildpunkte im R_4 . Auch für die Winkelmetrik gelten einfache Beziehungen. Einer Hermiteschen Bewegung entspricht u. a. im R_4 die Aufeinanderfolge von Drehungen um zwei ganznormale synektische Ebenen (Schraubung). Schließlich werden diejenigen Bewegungen der Hermiteschen Ebene konstruktiv behandelt, die einer Drehung des R_4 um eine beliebige synektische Ebene und einer allgemeinen Schraubung entsprechen. *Eckhart (Wien).*

● **Schilling, Friedrich: Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1937. VIII, 240 S. u. 114 Fig. geb. RM. 16.—.

Das vorliegende Werk ähnelt in seiner Zielsetzung und seinen Methoden den schon erschienenen Büchern des Verf.: Projektive und nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1931; Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1935 (dies. Zbl. 11, 170), auf deren Ergebnissen es aufbaut. Der erste Teil behandelt die pseudosphärische Geometrie. Charakteristisch ist die weitgehende Benutzung der Pseudosphärenfläche mit ihren geometrischen Eigenschaften zur Ableitung und anschaulichen Darstellung der nichteuklidischen Theoreme und ihre Abbildung auf die euklidische Ebene mit hyperbolischer Maßbestimmung. Im zweiten Teil wird die „ z -imaginäre Grundschale“, das ist der Teil der Kugel von imaginärem Radius mit reellen x -, y -Koordinaten und mit rein imaginärer, positiver z -Koordinate, für die Entwicklung der hyperbolisch-sphärischen Geometrie benutzt und durch Zentralprojektion auf die Tangentialebene $z = ir$ die hyperbolische Maßbestimmung der Ebene gewonnen. Der dritte Teil enthält die elliptisch-sphärische Geometrie auf der reellen Halbkugel und ihre Abbildung durch Zentralprojektion auf die Tangentialebene $z = r$ mit elliptischer Maßbestimmung. *Haenzel (Karlsruhe).*

Gambier, Bertrand: Représentation des déplacements autour d'un point fixe (dans l'espace à trois dimensions) par un couple de points de cet espace. J. Math. pures appl., IX. s. 16, 345—348 (1937).

Es handelt sich um die eindeutige Abbildung der Speere aus dem elliptischen R_3 auf orientierte Bipunkte der Kugel, so daß zwei auf der Kugel isometrische Punktepaare zwei inzidenten Speeren entsprechen. Man erhält ein nichteuklidisches elliptisches Analogon der wohlbekannten, von Blaschke und Grünwald herrührenden Darstellung der ebenen euklidischen Bewegungen bzw. Umlegungen auf Punkte bzw. Ebenen aus dem „quasielliptischen“ R_3 . — So gefaßt tritt das obige Ergebnis zuerst bei E. Study (Jber. Deutsch. Math.-Verein. 1902) auf. Auch das Verfahren läßt sich auf das Studysche zurückführen; in ihm wird aber das anallagmatische Denken dem projektiven vorgezogen. Die Abbildung wird beim Verf. konstruktiv bis in alle Einzelheiten durchgeführt. *D. Barbilian (București).*

Weiss, E. A.: S. Lies Abbildungen der Linienelemente einer Ebene und die Nicht-Euklidische Geraden-Kugel-Transformation. Mh. Math. Phys. 46, 199—205 (1937).

Es wird in dieser Arbeit ein Zusammenhang der 2. Lieschen Abbildung der ebenen Linienelemente auf die Punkte des R_3 mit der nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation auf folgende Weise hergestellt: Bei der Lieschen Abbildung ist das Gebüsch aller Kegelschnitte durch 2 feste Punkte maßgebend. Die Bedingung, daß die Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) demselben Kegelschnitt dieses Gebüsches angehören, läßt sich als von 3 Parametern x, y, p abhängendes System von Flächen 3. Ordnung deuten. Dies ∞^3 -System kann wiederum auf die Mannigfaltigkeit $1 : y : y^2 : z : zx : zx^2$ abgebildet werden, d. h. auf die Bildmannigfaltigkeit im R_5 von allen Tangenten einer Quadrik im R_3 oder der nichteuklidischen Minimalgeraden. Setzt man die so gewonnene Transformation der nichtorientierten ebenen Linienelemente auf die nichteuklidischen Minimalgeraden mit der Lieschen Abbildung der

orientierten Linienelemente zusammen, so erhält man die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation. Es wird hierfür zum Schluß auch noch eine konstruktive Herleitung gegeben vermittels einer stereographischen Projektion. *Burau* (Hamburg).

Analytische und algebraische Geometrie:

Turri, Tullio: Sulla identità proiettiva delle correlazioni nel campo razionale. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* **96**, 193—218 (1937).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, zu untersuchen, wann zwei nichtsinguläre rationale Korrelationen (d. h. zwei bilineare Formen mit zwei Reihen kogredienter Veränderlichen und rationalen Koeffizienten), die durch eine komplexe projektive Transformation ineinander übergeführt werden können, auch im Gebiete der rationalen projektiven Transformationen äquivalent sind. Zu diesem Zweck beweist Verf. zunächst, daß jede nichtsinguläre rationale bilineare Form als eine Summe rationaler bilinearer Formen angesehen werden kann, die gewissen sieben nicht weiter reduzierbaren Typen angehören; diese Typen werden mit $A, B, C, F_2, F_3, F_4, F_5$ bezeichnet; die letzten vier entsprechen den ähnlichen Typen der Kroneckerschen Klassifikation der bilinearen Formen im komplexen Gebiete; die Unterscheidung der ersten drei Typen ist eine Folge der vorausgesetzten Rationalität der Koeffizienten der betrachteten Formen und Transformationen. — Zweitens, wenn zwei rationale bilineare Formen R, S im komplexen Gebiete projektiv äquivalent sind, so sind die Homographien $(R')^{-1}R$ und $(S')^{-1}S$ rational äquivalent; dieser Satz ist eine Folge früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **15**, 367); die mit R rational äquivalenten Formen sind also, bis auf eine rationale Projektivität, unter den rationalen Formen X zu suchen, die der Bedingung $(R')^{-1}R = (X')^{-1}X$ genügen. Setzt man $X = RP$, so hat man für die lineare Transformation P die Bedingungsgleichung $RP = P'R$. — Nun hat man: Die rationalen Formen der Typen A, F_4, F_5 sind immer mit jeder rationalen und ihnen komplex-kongruenten Form auch rational-kongruent; dasselbe gilt, bis auf einen rationalen Faktor, für die Typen B, F_2, F_3 ; dasselbe gilt aber nicht für die Formen C . Man erschließt daraus die allgemeinste Form der rationalen Korrelationen R , die mit jeder komplex-äquivalenten Korrelation auch rational-äquivalent sind (bis auf einen rationalen Faktor und auf eine rationale Projektivität); diese allgemeinste Form lautet: $R = W_1 + W_2 + \dots + W_p + Y$, wo die W_i den Typen A, F_4, F_5 und Y einem der Typen B, F_2, F_3 angehören. *E. G. Togliatti* (Genova).

Clemow, J.: Invariants and covariants of three conics. *Math. Gaz.* **21**, 401—404 (1937).

Edge, W. L.: Notes on a net of quadric surfaces. II. Anharmonic covariants. *J. London Math. Soc.* **12**, 276—280 (1937).

Par toute transformation homographique de l'espace, la courbe de base d'un faisceau de quadriques admet un invariant: son module. Si on considère les ∞^2 courbes de base des faisceaux qui appartiennent à un réseau, ∞^1 de ces courbes ont un même module k , et leur lieu est une surface covariante associée au réseau. L'auteur étudie ces surfaces, en particulier la surface $I = 0$ lieu des courbes de base équi-anharmoniques et la surface $J = 0$ lieu des courbes de base harmoniques: il indique leurs ordres (8 et 12) et caractérise leurs singularités. Pour k quelconque, la surface covariante a une équation de la forme: $I^3 - \lambda J^2 = 0$. (I. v. ce Zbl. **17**, 184.) *P. Dubreil* (Nancy).

Wolkowitsch, David: Sur le rôle des quadriques d'inertie dans la théorie des coordonnées elliptiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **205**, 1031—1033 (1937).

Mit einem räumlichen Massensysteme ist eine Fläche zweiten Grades Q^2 als zentrale Trägheitsfläche verknüpft. Die durch $x = ix', y = iy', z = iz'$ konjugierte Fläche zweiten Grades Q'^2 und ihr polarer Raum bilden bekanntlich den Ausgangspunkt für die einheitliche geometrische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente räumlicher Massensysteme. Werden auf Q'^2 und die mit ihr konfokalen Flächen zweiten Grades die elliptischen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gegründet, so sind die drei elliptischen

Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eines Raumpunktes P die drei Halbachsenquadrate der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt P bez. des Massensystemes. Diesem gleichfalls bekannten Zusammenhange [Tôhoku Math. J. 36, 41—49 (1932); vgl. dies. Zbl. 5, 177] zwischen der Theorie der Trägheitsflächen und den elliptischen Koordinaten geht der Verf. dann noch weiter nach, indem er die Bedeutung der drei Fälle $\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ und $\lambda_2 = -\lambda_3$ untersucht. Haenzel (Karlsruhe).

Warnock, W. G.: A note on line configurations. Tôhoku Math. J. 43, 74—76 (1937).

Die Permutationen, welche die Plückerschen Koordinaten einer Geraden wieder in ein Sextupel von Koordinaten überführen, bilden eine G_{48} . In einer früheren Note [Tôhoku Math. J. 36, 303—319 (1933); dies. Zbl. 6, 217] hat der Verf. die Figur der Schnittpunkte der entsprechenden 48 Geraden mit einer Koordinatenebene untersucht und fand, daß diese Punkte paarweise auf Geraden durch die Eckpunkte des Koordinatendreiecks liegen. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Figuren, die den Untergruppen G_{48} entsprechen. Ergebnis: Obige Aussage gilt für ebenso viele Eckpunkte, als wie die Untergruppe einfache Transpositionen enthält. Friedrich Levi.

Turrière, Émile: Sur diverses courbes planes. An. Fac. Ci. Porto 22, 93—128 et 145—150 (1937).

1. Résolution graphique de l'équation de Képler et de l'équation des comètes de Gauss. 2. Les quartiques d'équation $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = \alpha^2$; elles possèdent 28 bitangentes réelles pour $\frac{8}{9} < \alpha^2 < 1$; points d'inflexion. 3. Courbes de la théorie des normales aux coniques; courbes de Desboves. 4. La courbe du danseur de corde. 5. Les courbes paratrigonométriques. 6. Les courbes $\tanh y = c^2 \tanh x$. 7. Les courbes de Mercator comme antiradiales centrales des coniques. 8. La chaînette d'égale résistance. 9. La courbe atuptique. 10. Les courbes de F. J. Vaes. 11. Notes bibliographiques sur des courbes spéciales. O. Bottema (Deventer, Holl.).

Gherardelli, G.: Gruppi Cayleyani di punti sopra una curva ellittica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 144—147 (1937).

Eine Gruppe G von n Punkten einer elliptischen Kurve γ wird eine Cayleysche Gruppe genannt, wenn die durch G definierte vollständige Linearschar g_n^{n-1} eine g_n^{n-2} enthält, für welche alle Punkte von G ($n - 1$)-fache Punkte sind. Für jeden Wert von n gibt es auf γ Cayleysche Gruppen G_n . Hier wird der Fall $n = 3$ betrachtet. Eine erste Lösung besteht dann aus drei beliebig zusammenfallenden Punkten von γ . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei getrennte Punkte a_1, a_2, a_3 von γ eine Cayleysche Gruppe bilden, kann analytisch durch die bekannte Weierstrasssche Funktion $\zeta(u)$ oder $\wp(u)$ oder auch $\wp'(u)$ ausgedrückt werden; sie lautet z. B. $\wp'(a_2 - a_3) = \wp'(a_3 - a_1) = \wp'(a_1 - a_2)$. — Ist γ eine ebene C^3 , dann bilden a_1, a_2, a_3 eine in bezug auf γ konjugierte Gruppe; umgekehrt aber besteht eine solche konjugierte Gruppe von drei Punkten von γ entweder aus den Punkten einer Cayleyschen Gruppe oder aus den Schnittpunkten von γ mit einer Geraden; insbesondere besitzen die Schnittpunkte von γ mit den Tangenten ihrer Cayleyschen Kurve beide Eigenschaften. — Die Punktepaare $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_1$ definieren auf γ drei Involutionen g_2^1 ; ihre Summe ist eine symmetrische Korrespondenz (3, 3) mit der Wertigkeit 3; sie hat im allgemeinen die Dimension 5; ihre Dimension erniedrigt sich auf 3 nur, wenn a_1, a_2, a_3 eine Cayleysche Gruppe bilden. E. G. Togliatti (Genova).

Maroni, Arturo: Sulle famiglie algebriche involutorie di curve gobbe irriducibili. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 96, 163—178 (1937).

Étude d'une famille algébrique irréductible (C) de courbes gauches, dont la courbe générique est irréductible. Soit r_3 la dimension spatiale de cette famille (nombre maximum de points génériques de l'espace par lesquels passe au moins une courbe de la famille); on suppose que la famille n'est pas totalement spatiale c'est-à-dire que par r_3 points génériques passe une infinité de courbes de la famille, qui sont alors sur une surface Φ , dont chaque composante irréductible contient le même nombre

de systèmes irréductibles de courbes C passant par r_3 points, ces systèmes ayant tous la même dimension r_2 appelée dimension superficielle de (C) . La famille (C) est de dimension $r = 2r_3 + r_2$. L'auteur définit les familles (C) involutives, les points fondamentaux et les courbes fondamentales de la famille et démontre le théorème suivant: Une famille (C) involutive pour laquelle on a $r_2 > 1$, $r_3 > 1$ est contenue totalement dans une famille intersection complète de deux systèmes linéaires de surfaces, ou s'y réduit par l'adjonction de courbes fixes ou semi-fixes. L'auteur examine en outre les cas, plus compliqués: $r_2 > 1$, $r_3 = 1$; et $r_2 = 1$, $r_3 = 1$. *P. Dubreil* (Nancy).

Buzano, Piero: Un'estensione iperspaziale della rigata cubica di Cayley. Boll. Un. Mat. Ital. 16, 173—177 (1937).

Fixons dans S_n une C^n rationnelle normale ($n \geq 3$) et la droite r qui la touche dans un de ses points A . La surface lieu des ∞^1 droites joignant les différents points de C^n avec les points où les hyperplans osculateurs relatifs coupent r , est une surface réglée Γ_2^n , d'ordre n , passant simplement par C^n et doublement par r , et admettant cette droite en même temps comme directrice et comme génératrice; Γ_2^n possède ∞^{n-2} quasi-asymptotiques $\gamma_{1,n-1}$, qui sont des courbes rationnelles normales de S_n (parmi lesquelles il y a C^n) passant par A et ayant toutes dans ce point les mêmes espaces osculateurs. Les homographies qui changent Γ_2^n en soi-même sont ∞^n ; elles admettent toutes A comme point fixe, et peuvent s'obtenir comme produits des ∞^2 homographies transformant le point A et une (et par conséquent chaque) $\gamma_{1,n-1}$ en soi-même, par les ∞^{n-2} homographies qui transforment en soi-même chaque génératrice de Γ_2^n (une desquelles est déterminée si l'on assigne deux $\gamma_{1,n-1}$ homologues). — Pour $n = 3$ ces résultats sont connus, Γ_2^3 se réduisant à la surface cubique réglée de Cayley.

Beniamino Segre (Bologna).

Buzano, P.: Rigate di ordine n , dello spazio a n dimensioni, aventi ∞^n omografie in sé. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 61—65 (1937).

In einer früheren Abhandlung (vgl. vorsteh. Ref.) hat Verf. eine Regelfläche Γ_2^n der Ordnung n eines Raumes S_n betrachtet, die bei ∞^n Homographien in sich selbst übergeführt wird; Γ_2^n besitzt eine Leitgerade, die gleichzeitig auch als eine Erzeugende zu betrachten ist (so wie bei der Cayleyschen Regelfläche 3. Ordnung des Raumes S_3); sie ist also die Projektion einer rationalen normalen Regelfläche R^n eines Raumes S_{n+1} , die eine Leitgerade d besitzt, aus einem in der Ebene von d und einer Erzeugenden g gelegenen Punkte. In der vorliegenden Abhandlung beweist Verf., daß Γ_2^n die einzige Regelfläche der Ordnung n eines Raumes S_n ist, die bei ∞^n Homographien in sich selbst übergeführt wird (die Kegel ausgeschlossen). Zu diesem Zweck betrachtet er eine rationale normale Regelfläche R^n im Raume S_{n+1} und eine ihrer Projektionen R_0^n auf S_n von einem Punkt P_0 aus; die Homographien, die R^n und P_0 invariant lassen, führen dann zu allen Homographien des Raumes S_n , die R_0^n invariant lassen; diese letzten müssen wenigstens ∞^n sein; diejenigen, die R^n invariant lassen, sind $\infty^{n-2\mu+5}$, wenn $n \neq 2\mu$, und ∞^6 , wenn $n = 2\mu$ (hier bedeutet μ die niedrigste Ordnung einer Leitlinie von R^n); man schließt daraus folgende vier Möglichkeiten: 1. $\mu = 1$, $n > 2$; 2. $\mu = 2$, $n > 4$; 3. $\mu = 2$, $n = 4$; 4. $\mu = 3$, $n = 6$. Die erste Möglichkeit liefert als einzige Lösung eben die betrachtete Γ_2^n ; die anderen drei liefern keine Lösung. Es wird dann noch bemerkt, daß Γ_2^{n-1} als Projektion einer Γ_2^n aus einem ihrer Punkte auf S_{n-1} erhalten werden kann.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur les points de diramation des surfaces algébriques multiples. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1030—1031 (1937).

Es sei I_p eine Involution einer Primzahlordnung p auf einer algebraischen Fläche F ; die Anzahl der Doppelpunkte von I_p sei endlich; es sei Φ ein normales Bild von I_p mit getrennten Verzweigungspunkten; den hyperbenen Schnitten Γ von Φ entsprechen auf F gewisse Kurven C . Aus der Singularität, die die durch einen Doppelpunkt A von I_p hindurchgehenden Kurven C in A selbst besitzen, kann man Eigenschaften der Singularität von Φ im entsprechenden Verzweigungspunkt A' entnehmen und

umgekehrt. Fall, wo der Berührungskegel von Φ in A' in zwei Kegel der Ordnungen n_1, n_2 zerfällt, die eine gemeinsame Erzeugende aufweisen; die Beweise sind nur kurz angedeutet.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Une observation sur les points unis des involutions d'ordre huit appartenant à une surface algébrique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 294—297 (1937).

Segre, Beniamino: Intorno alle parti fisse del sistema canonico sopra una superficie algebrica. Restratto di: Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna 6 pag. (1936).

L'Auteur revient sur la question suivante: Toute partie fixe du système canonique d'une surface algébrique est-elle nécessairement courbe exceptionnelle, que F. Enriques avait résolue par la négative [Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche. Mem. Soc. Ital. Sci., III. s. 10 (1896)] en montrant par un exemple que si une surface de genre géométrique $p_g = 1$ contient une seule courbe canonique irréductible, celle-ci n'est pas nécessairement exceptionnelle. B. Segre apporte un complément à ce résultat en construisant une surface de genre géométrique $p_g > 1$ dont le système canonique contient une partie fixe non exceptionnelle. *P. Dubreil.*

Todd, J. A.: Intersections of loci on an algebraic V_4 . Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 425—437 (1937).

Es werden verschiedene Fragen behandelt, die die Schnitte von auf einer algebraischen V_4 liegenden algebraischen Mannigfaltigkeiten und die damit verbundenen Äquivalenzprobleme betreffen. Mit ähnlichen Fragen auf einer V_3 hat sich B. Segre beschäftigt (dies. Zbl. 9, 371—372). Zunächst bestimmt Verf. die wichtigsten invarianten Gebilde (kanonische Kurven, kanonische Schar) auf der vollständigen Schnittfläche von zwei oder Schnittkurve von drei auf V_4 liegenden V_3 . Dann betrachtet er die restliche Schnittkurve D einer V_3 und einer V_2 , die eine gegebene Kurve C gemein haben, sowohl im Falle einer singularitätenfreien C als auch im Falle, wo C eine endliche Anzahl h vierfacher Punkte besitzt, die in h uneigentliche Doppelpunkte der V_2 fallen. Es kommt dann die Frage der Anzahl der übrigen Schnittpunkte von zwei auf V_4 liegenden Flächen, die eine Kurve C gemein haben; auch im Falle, wo die zwei Flächen eine gewisse Anzahl h uneigentlicher Doppelpunkte gemein haben, die für C vierfach sind. Schwieriger ist die Untersuchung der restlichen Schnittfläche T von zwei V_3 , die durch eine Fläche S hindurchgehen; es wird vorausgesetzt, daß S eine endliche Anzahl uneigentlicher Doppelpunkte besitzt; es werden zunächst die Doppelpunkte der zwei gegebenen V_3 , die auf S liegen, abgezählt, um dann die invarianten Gebilde von T zu bestimmen. Schließlich die übrigen Schnitte von drei oder vier V_3 , die eine gemeinsame Fläche besitzen. — Die Anwendung der gefundenen Formeln auf den Fall, wo V_4 ein linearer Raum S_4 ist, liefert die bekannten Formeln über die projektiven Charaktere der Schnitte von zwei, drei, vier V_3 im Raume S_4 .

E. G. Togliatti (Genova).

Differentialgeometrie:

Goormaghtigh, R.: Sur un problème relatif aux courbes gauches. Mathesis 51, 405—408 (1937).

Trägt man auf den Tangenten einer gegebenen Raumkurve (M) von den Berührungspunkten M aus Strecken ab, deren Länge r eine gegebene Funktion von M ist, so erfüllen die Endpunkte P eine neue Raumkurve (P). Verf. bestimmt das begleitende Dreiein und das Krümmungszentrum von (P), ausgedrückt durch die Größen von (M) und die Funktion r und ihre Ableitungen, und gibt geometrische Deutungen für die gefundenen Formeln.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Tsuboko, Matsuji: On the locus of the space cubics osculating a space curve. Mem. Ryojun Coll. Engng. 10, 63—74 (1937).

Let $x(t)$ be a space curve Γ and K_3 its osculating space cubic at x . When x moves along Γ the cubic K_3 describes a surface S . The author investigates the properties of S . As one example of his results we mention the following: If all the tangents of Γ belong

to a linear complex, K_3 is a Darboux curve of S and its tangent at y and the line xy separate harmonically two remaining Darboux directions at y . *Hlavatý*.

Terracini, A.: Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 153—158 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 17, 226. Man erhält schließlich 9 verschiedene Typen von Flächen, bei 4 von diesen sind die 5 Scharen Hauptlinien alle verschieden. Einer davon war schon früher bekannt und ist transzendent, 2 der 3 anderen sind algebraisch mit algebraischen Hauptlinien. Verf. untersucht diese Flächen und die daraufliegenden Gewebe aus Hauptkurven. *G. Bol* (Hamburg).

Deuuyper, Marcel: Sur les suites de Laplace dont quatre rayons consécutifs quelconques forment un quadrilatère. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 950—951 (1937).

Verf. beweist den Satz: Sind in einer Laplaceschen Folge zwei konsekutive Strahlen mit den Indizes n und $n+1$ komplanar zu den Strahlen mit den Indizes $n+3$ und $n+4$, so ist jeder Strahl vom Index m komplanar zum Strahl vom Index $m+3$, und irgend vier konsekutive Strahlen bilden ein Vierseit. *W. Haack* (Karlsruhe).

Kanitani, Jōyō: Sur les particularisations du repère attaché à une surface générale appartenant à un espace projectif à cinq dimensions. Mem. Ryojun Coll. Engng. 10, 27—51 (1937).

Let $x(u, v)$ be a surface V in a projective five dimensional flat space, x_1, x_2 two points in the tangent plane T of V at x , and x_m ($m=3, 4, 5$) three other points, such that $\text{Det}[x, x_1, \dots, x_5] \neq 0$. The author considers a group of projective transformations which preserves the following types of equations of V in the (local) non-homogeneous coördinates

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{1}{2}(z^1)^2 + \sum_1^2 b_{\sigma\tau\rho}^3 z^\sigma z^\tau z^\rho + \dots, & z^4 &= z^1 z^2 + \sum_1^2 b_{\sigma\tau\rho}^4 z^\sigma z^\tau z^\rho + \dots, \\ z^5 &= \frac{1}{2}(z^2)^2 + \sum_1^2 b_{\sigma\tau\rho}^5 z^\sigma z^\tau z^\rho + \dots. \end{aligned}$$

This group preserves five directions in T through x . Any curve on V , through x , tangent to one of them has a six-point contact with a certain quadric. (If V is a quartic, then those directions are not determined.) The simplex x, \dots, x_5 mentioned above can be specialized in two different geometrical ways, one of which is the following: Let $V_{(m)}$ designate the projection of V from $\overline{x_a x_b}$ onto $S_{(m)} \equiv (x, x_1, x_2, x_m)$ ($a, b \neq (m=3, 4, 5)$) and let $Q_{(m)}$ be such a quadric in $S_{(m)}$ (which has a contact of second order with $V_{(m)}$) that the straight lines $x_1 x_2$ and xx_m are its reciprocal polar lines. Then there are three tangent directions on $V_{(m)}$ through x , in which the tangent curves on $V_{(m)}$ have the contact of order 3 with $Q_{(m)}$. If those directions are apolar to xx_1, xx_2 for any $m=3, 4, 5$ then the simplex is said to be a specialized one of the first kind. *Hlavatý* (Princeton, N. J.).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Pipping, Nils: Über konvexe Figuren K_7 . Acta Acad. Aboens., Math. et Phys. 9, 1—19 (1937).

Verf. bestimmt, eine frühere Untersuchung fortsetzend (vgl. dies. Zbl. 3, 130, auch wegen der Bezeichnungen), die genaue obere Schranke von $JF_1 F_7$. Es ergibt sich durch Heranziehung von Ergebnissen der genannten Arbeit und Untersuchung der extremen Bereiche K_7 der Wert 10. Verf. weist darauf hin, daß alle von Minkowski und ihm bisher gefundenen Extrembereiche K_7 Sechsecke oder Parallelogramme sind.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Vanek, Karl: Über Krümmungskreise ebener Kurven. S.-B. Akad. Wiss. Wien 146, 23—50 (1937).

Verf. knüpft an die Behandlung des Krümmungskreises in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie von Hjelmlev und Müller-Kruppa an und untersucht systematisch eine größere Zahl von bekannten und neuen Definitionen des Krümmungs-

kreises einer ebenen konvexen Kurve auf ihre Äquivalenz. Charakteristisch für diese ist, daß sie nicht auf analytische Darstellungen der Kurve gegründet sind, sondern den Krümmungskreis in einem Punkt P als Grenzlage von Kreisen auffassen, die durch gewisse gegen P strebende Kurvenelemente bestimmt sind. Es werden 2 Klassen solcher Definitionen betrachtet. Bei denen der 1. Klasse ist ein Teil der die Näherungskreise festlegenden Elemente mit dem Punkt P fest verbunden, während bei denen der 2. Klasse alle diese Elemente variieren. Es wird nachgewiesen, daß die Definitionen jeder Klasse unter sich äquivalent sind und daß der Krümmungskreis nach einer Definition der 1. Klasse stets existiert, wenn er nach einer der 2. Klasse existiert, daß aber das Umgekehrte nicht allgemein zutrifft. Von den 9 Definitionen der 1. Klasse und den 5 der 2. Klasse können hier nur typische Beispiele genannt werden. 1. Klasse: Es sei c der ebene konvexe Bogen mit stetiger Tangente, P ein fester Punkt von c und t die Tangente in P . Strebt der Kreis, der mit c das feste Linienelement (P, t) und den gegen P konvergierenden Punkt $Q \neq P$ gemein hat, gegen eine Grenzlage, so heißt der Grenzkreis der Krümmungskreis von c in P . 2. Klasse: Es seien Q und $R \neq Q$ Punkte von c und s die Tangente in Q . Strebt der Kreis, der mit c das Linienelement (Q, s) und den Punkt R gemein hat, gegen eine Grenzlage, wenn Q und R unabhängig gegen P konvergieren, so heißt der Grenzkreis der Krümmungskreis in P . [Von der Literatur wären noch die Arbeiten von Hjelmslev, Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie. Acta math. 47, 143—188 (1925), und Jessen, Om konvekse Kurvers Krumning. Mat. Tidsskr. B 1929, 50—62, zu nennen, wo sich einige der Resultate des Verf., teils sogar in allgemeinerer Form, finden.] W. Fenchel (Kopenhagen).

Graustein, W. C., and S. B. Jackson: The four-vertex theorem for a certain type of space curves. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 737—741 (1937).

Eine Raumkurve C habe folgende Eigenschaften: a) C ist geschlossen und zweimal stetig differenzierbar. b) Die Krümmung von C ist überall positiv und nicht konstant. c) Die Projektion des sphärischen Bildes von C auf eine zur Geraden OG senkrechte oder, wenn $O = G$ ist, eine beliebige Ebene ist eine einfach durchlaufene konvexe Kurve. Hierbei bedeuten O den Ursprung und G den Schwerpunkt des homogen belegten sphärischen Bildes. Dann gilt (wie für ebene Kurven, vgl. dies. Zbl. 13, 319, Graustein): Die Anzahl der primären Scheitel von C ist um wenigstens 4 größer als die der sekundären. Dabei heißt ein Punkt von C primärer Scheitel, wenn die Krümmung dort ein Maximum (Minimum) hat, das größer (kleiner) als die durchschnittliche Krümmung von C ist. Alle übrigen Extremumstellen der Krümmung heißen sekundäre Scheitel.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Haupt, Otto: Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. I. J. reine angew. Math. 178, 14—28 (1937).

Bogen bedeuten in dieser Arbeit eindeutige stetige ebene Streckenbilder. Ein Bogen \mathfrak{B} heißt von der beschränkten zyklischen Ordnung n , von wachsender bzw. von unendlicher zyklischer Ordnung, wenn die Mächtigkeit des Durchschnittes von \mathfrak{B} mit einem Kreise der Ebene maximal n , endlich, aber nicht beschränkt bzw. maximal gleich unendlich ist. Hierbei wird jeder Punkt mit einer entsprechenden Vielfachheit genommen und zu den Kreisen werden auch die Geraden gezählt. In den ersten zwei Fällen wird die zyklische Ordnung endlich genannt. Bei der Bestimmung der zyklischen Ordnung von \mathfrak{B} wird jeder auf einem Kreise (oder auf einer Geraden) gelegene Teilbogen von \mathfrak{B} als ein (verlängerter) Punkt betrachtet. Der Bogen \mathfrak{B} heißt dann zyklisch ordnungshomogen, wenn seine Punkte die gleiche zyklische Ordnung besitzen. Hat ein zyklisch ordnungshomogener Bogen selbst die gleiche zyklische Ordnung wie seine Punkte, so ist er total ordnungshomogen. — Aus einem allgemeineren Satze des Verf. (vgl. dies. Zbl. 17, 91) folgt der folgende Verteilungssatz: Ein Bogen \mathfrak{B} läßt sich als eine in \mathfrak{B} abgeschlossene Hülle einer Summe von (höchstens) abzählbar vielen zyklisch total ordnungshomogenen Teilbogen darstellen, welche teilweise höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Es wird hier der folgende Existenzsatz bewiesen: Abgesehen von

Kreisen und Strecken gibt es total zyklisch ordnungshomogene Bogen nur von der (kleinstmöglichen) zyklischen Ordnung drei und von der (größtmöglichen) zyklischen Ordnung unendlich. — Beispiele total zyklisch ordnungshomogener Bogen liefern die Teilbogen eines Ellipsenquadranten und die Konvexbogen mit überall dicht liegenden Ecken. Ein Bogen ist dann und nur dann von der zyklischen Ordnung zwei, wenn er ein Kreisbogen oder eine Strecke ist. Enthält ein zyklisch ordnungshomogener Bogen Strecken oder Kreisbogen, so ist er von der zyklischen Ordnung zwei. *Sz. Nagy.*

Segre, Beniamino: *Invarianti differenziali relativiti alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei.* Rend. Circ. mat. Palermo 60, 224—232 (1936).

Tricomi (vgl. dies. Zbl. 14, 124) und **Terracini** (vgl. dies. Zbl. 14, 177) haben für eineindeutige, stetig differenzierbare Abbildungen von Punkten auf Punkte bzw. von Punkten auf Hyperebenen zweier n -dimensionalen euklidischen Räume Dichten eingeführt, die aufs engste mit Funktionaldeterminanten der Abbildungen zusammenhängen. Verf. bestimmt in anschaulicher Weise die sämtlichen metrischen Differentialinvarianten erster Ordnung solcher Abbildungen. Bei Punktabbildungen handelt es sich dabei um eine naheliegende Verallgemeinerung der aus der Kinematik der Flüssigkeiten bekannten Betrachtungen. Als die Invarianten, aus denen sich alle übrigen berechnen lassen, ergeben sich die n Hauptdilatationen. Deren Produkt ist die erwähnte Dichte. Im Fall dualistischer Abbildungen sind die Verhältnisse ein wenig komplizierter. Es sei P ein fester, Q ein variabler Punkt, π bzw. χ die ihnen zugeordneten Hyperebenen. Strebt Q derart gegen P , daß der Halbstrahl PQ gegen einen Halbstrahl r konvergiert, so strebt das Verhältnis des Winkels zwischen π und χ zum Abstand PQ gegen eine nur von r abhängige Zahl $d(r)$, den Dilatationskoeffizienten der Richtung r . Trägt man $1/d(r)$ von P aus auf den Halbstrahlen r ab, so erhält man einen elliptischen Zylinder. In der zu seiner Achse r_0 senkrechten Hyperebene hat man also $n - 1$ „Hauptdilatationen“. Den Nachbarpunkten von P auf r_0 entsprechen zu π parallele Nachbar-ebenen χ . Als Verhältnis der Abstände dieser Ebenen zu den Abständen PQ erhält man eine n -te Invariante, den „Verlängerungsindex“. Das Produkt dieser n Invarianten ist wieder die erwähnte Dichte.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Kagan, B.: *Über die metrische Dualität. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.)* Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 256—265 (1937).

Verf. berichtet zunächst über eine neue Herleitung von Sätzen von Cartan [Bull. Soc. Math. France 24, 140—177 (1896)], die die Integralgeometrie der nicht-euklidischen Ebene, insbesondere das Geradenmaß betreffen. Das Quadrat des infinitesimalen Winkels zwischen zwei benachbarten Geraden ist eine quadratische Differentialform in den Linienkoordinaten, wobei die Koeffizienten gewisse Funktionen dieser Linienkoordinaten sind. Diese „gonometrische Fundamentalforn“ ist also der metrischen, hier als „longometrisch“ bezeichneten Fundamentalforn vollkommen analog. Der mittels der gonometrischen Forn berechnete „Flächeninhalt“ einer Geradenmenge ist genau das Geradenmaß der Integralgeometrie. Verf. verallgemeinert nun den Begriff der gonometrischen Forn in folgender Weise. Auf einer Fläche sei eine zweiparametrische Kurvenschar gegeben. ξ, η seien die Parameter. Das Quadrat des infinitesimalen Winkels zwischen zwei sich schneidenden Nachbarkurven ist eine im allgemeinen Finslersche Differentialform in ξ und η . Die Kurvenschar wird als gonometrisch bezeichnet, wenn diese Forn eine gewöhnliche quadratische Differentialform mit Koeffizienten ist, die nur von ξ und η abhängen. Es wird eine partielle Differentialgleichung 5. Ordnung aufgestellt, von der die Bestimmung aller gonometrischen Kurvenscharen abhängt. Ferner wird bemerkt, daß alle zweiparametrischen Kreisscharen in der Ebene gonometrisch sind.

W. Fenchel (Kopenhagen)

Mirguet, Jean: *Sur les surfaces possédant un nombre fini de paratingentes secondes.* Acta math. 68, 293—300 (1937).

L'auteur démontre en premier lieu que la structure du contingent d'une surface

est convexe en tout point où cette surface ne contient qu'un nombre fini de paratingentes secondes. S'appuyant ensuite sur la notion nouvelle de paratingente seconde concomitante à une demi-tangente (une paratingente seconde est dite concomitante à une demi-tangente MT , si les demi-sécantes qui joignent M aux points du triplet aligné qui engendre la paratingente, ont pour position limite commune MT), il montre que le contingent d'une surface se réduit à deux demi-plans en un point où il n'existe qu'une paratingente seconde. Dans le cas où les paratingentes secondes sont au nombre de deux, le contingent est plan dans des cas très étendus; notamment si l'angle des deux paratingentes reste au-dessus d'une certaine limite, la surface est une orthosurface.

E. Blanc (Toulon).

Topologie:

Vázsonyi, Endre: Graphen auf Flächen. Mat. fiz. Lap. 44, 133—163 u. deutsch. Zusammenfassung 163 (1937) [Ungarisch].

Die Arbeit gehört zur relativen Graphentheorie und schließt sich Untersuchungen von D. König (1911) und C. Kuratowski (1930) an. — § 1. Zeichnet man auf eine einseitige Fläche von möglichst niederem Geschlecht einen zusammenhängenden endlichen Graphen, so sind die durch den Graphen erzeugten Länder nicht unbedingt Elementarflächen; es kann vorkommen, daß ein solches Land mit dem Möbiusschen Band homöomorph ist. Es ist aber möglich, unseren Graphen auf diese Fläche auch so zu zeichnen, daß alle Länder elementar sind. § 2. Eine kombinatorische Methode zur Bestimmung der Geschlechtszahl der ein- oder zweiseitigen Fläche von niedrigstem Geschlecht, auf welche ein gegebener zusammenhängender endlicher Graph gezeichnet werden kann. § 3. Bestimmung dieser Geschlechtszahlen, wenn sie für die einzelnen zusammenhängenden Bestandteile, in welche der gegebene endliche, nicht zusammenhängende Graph zerfällt, bekannt sind. § 4. Zu jedem zusammenhängenden endlichen Graphen läßt sich eine Fläche bestimmen, die durch den Graphen in eine einzige Elementarfläche zerlegt wird. § 5. Ein unendlicher Graph läßt sich dann und nur dann auf eine Fläche zeichnen, wenn alle seine endlichen Teilgraphen auf diese Fläche gezeichnet werden können. Der Satz von Kuratowski gilt auch für unendliche Graphen, wenn die Menge ihrer Kanten abzählbar ist. Ein dem Kuratowskischen entsprechendes Kriterium dafür, daß ein unendlicher Graph sich auf keine einzige Fläche zeichnen läßt. (Der Gittergraph des n -dimensionalen Raumes mit > 2 läßt sich z. B. auf keine Fläche zeichnen.) § 6. Der Fall offener Flächen. § 7. Zu einer jeden zweiseitigen Fläche mit gegebener beliebig großer Geschlechtszahl läßt sich ein endlicher Graph so bestimmen, daß er wohl auf die projektive Ebene, nicht aber auf die gegebene zweiseitige Fläche gezeichnet werden kann. Wenn aber ein endlicher oder unendlicher Graph auf eine einseitige Fläche gezeichnet werden kann, so läßt er sich auch auf eine zweiseitige Fläche zeichnen. Es gibt jedoch eine aus abzählbar vielen Jordan-Bögen bestehende Kurve (kein Graph), die sich auf jede einseitige, aber auf keine zweiseitige Fläche zeichnen läßt.

Autoreferat.

Alexandroff, A.: On the coverings of the plane. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 307—317 u. engl. Zusammenfassung 318 (1937) [Russisch].

1. Eine Überdeckung der Ebene durch einfach zusammenhängende, von einfachen geschlossenen Kurven begrenzte Gebiete heißt normal, falls der Durchschnitt von zwei Gebieten entweder leer oder ein Bogen ist (daraus folgt, daß sich in einer Ecke nur drei Gebiete treffen, z. B. die Überdeckung durch reguläre Sechsecke). Dann gilt der Satz: Aus einer jeden normalen Überdeckung der Ebene kann man ein System von einander enthaltenden Komplexen (Summe von endlich vielen Gebieten der Überdeckung) konstruieren derart, daß die in bezug auf diese Komplexe ausgezählten arithmetischen Mittel der zu einem Gebiete benachbarten Gebiete den $\text{Lim. inf.} \geq 6$ hat. — 2. Ist eine lokalendliche Überdeckung der Ebene mit kompakten Mengen derart gegeben, daß für eine beliebige Folge von unbeschränkt wachsenden einfachen

geschlossenen Kurven $L_1, L_2, \dots, L_m, \dots$ die Kurve L_m für $m \geq n$ (n genügend groß) mindestens 27 Mengen der Überdeckung schneidet, so gibt es unter den Mengen F mindestens eine, die ≥ 6 Mengen schneidet. Denselben Satz für jede lokallendliche Überdeckung hat L. Lichtenbaum bewiesen (dies. Zbl. 16, 279). *Julia Róžańska.*

Victoris, L.: Beispiel einer in gewissem Sinn schwach zusammenhängenden Menge. Mh. Math. Phys. 46, 206—208 (1937).

Verf. konstruiert eine ebene zusammenhängende Menge M , die für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von abzählbar vielen in M abgeschlossenen Teilmengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ ist; jede dieser Teilmengen ist in M die abgeschlossene Hülle einer in M offenen Menge und zusammenhängend. *Nöbeling (Erlangen).*

Vaughan, H. E.: On locally compact metrisable spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 532—535 (1937).

The author shows first that a metrisable space is locally compact if and only if it is the difference of two closed sets in every metric space in which it is topologically contained. A metrisable space is defined to be totally complete provided the metric is so chosen that every bounded set is compact. It is shown that a Hausdorff space is homeomorphic with a totally complete metric space if and only if it is locally compact and separable. *Whyburn (Virginia).*

Komatu, A.: Über die Ringdualität eines Kompaktums. Tôhoku Math. J. 43, 414—420 (1937).

The author establishes duality relations between the Alexander ring (see this Zbl. 15, 129) of a compact set F in R^n and the Gordon ring (this Zbl. 15, 84) of $R^n - F$. It is shown that these rings are isomorphic and that a similar result holds in case F is a complex. In each case it is assumed that the coefficient domain is a ring.

G. T. Whyburn (Virginia).

Kolmogoroff, A.: Grandses gauches et invariants topologiques. (I. internat. Konferenz. f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 342—344 (1937).

Ein System K von orientierten Simplexen habe die Eigenschaft, daß mit jedem Simplex X^n auch das umgekehrt orientierte Simplex $-X^n$ sowie alle seine Seiten zu K gehören. Auf K werden reelle Funktionen f_n betrachtet, deren Argumente die orientierten n -Simplexe sind und die die Eigenschaft $f_n(-X^n) = -f_n(X^n)$ besitzen. Zwei Funktionen $f_n(X^n)$ und $f_m(X^m)$ werden multipliziert gemäß der Formel

$$f_n f_m = f_{n+m+1}(X^{n+m+1}) = \frac{1}{2} \sum f_n(X^n) f_m(X^m).$$

Dabei wird über alle Paare punktfremder und in bestimmter Weise orientierter Seiten X^n, X^m von X^{n+m+1} summiert. Von besonderer Bedeutung ist das Produkt $e_0 f_n = \text{rot } f_n$, in welchem e_0 die Funktion bezeichnet, die in den positiv orientierten 0-Simplexen den Wert $+1$, in den negativ orientierten den Wert -1 hat. Es ist $\text{rot}(\text{rot } f_n) = 0$. f_n heißt ein Zykel, wenn $\text{rot } f_n = 0$ ist; dagegen heißt f_n nullhomolog, wenn eine Funktion f_{n-1} existiert, für welche $\text{rot } f_{n-1} = f_n$ ist. Wie in der kombinatorischen Topologie läßt sich dann die Bettische Gruppe definieren als Faktorgruppe der Gruppe aller n -Zyklen nach der Untergruppe der nullhomologen n -Zyklen. Auch ein Homologiering läßt sich für diese Zyklen mit Hilfe einer passenden Multiplikation definieren.

H. Seifert (Heidelberg).

Mathematische Physik.

Optik:

Picht, Johannes: Über verzeichnungsfreie Aufsetzlupe. Z. Instrumentenkde 57, 484—494 (1937).

Die Aufsetzlupe sind plankonvexe Linsen; die Kugelfläche ist auf der Augen- seite, der Gegenstand liegt nahe an der ebenen Fläche, das Auge ist verhältnismäßig

weit (etwa 250 mm) entfernt. Die vorliegende Arbeit enthält Berichtigungen zu einem Aufsatz von J. Flüge [Z. Instrumentenkde 55, 193—201 (1935)]. Besonders behandelt Picht die Volute, wo der Gegenstand der ebenen Fläche anliegt. Für die Verzeichnungsfreiheit erhält P. durch eine elementare Ableitung:

$$\frac{a}{r} = \frac{\left(\frac{n}{r}\right)^2}{\left(\frac{1}{b'} + \frac{n-1}{r}\right)^2 + n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b'}\right)^2}.$$

Hier ist a die Dicke der Linse, b' der Abstand des Augendrehpunkts von der Kugel- fläche. Die nämliche Gleichung hatte Flüge aus der Seidelschen Formel erhalten. P. betrachtet b'/r und n als veränderlich und gibt eine Tafel sowie eine zeichnerische Darstellung für die Änderung von a/r . In gleicher Weise wird statt b'/r dann b'/s als Veränderliche angenommen (s Abstand des Augendrehpunkts vom Bilde). Zum Schlusse wird untersucht, was eintritt, wenn das Auge sich nicht in der Achse der Lupe befindet.

H. Boegehold (Jena).

Condon, E. U.: Theories of optical rotatory power. Rev. Modern Physics 9, 432—457 (1937).

Die Abhandlung ist eine sehr eingehende zusammenfassende Darstellung der verschiedenen theoretischen Arbeiten über das optische Drehvermögen optisch aktiver Flüssigkeiten und über den Zusammenhang des Drehvermögens mit der Struktur der einzelnen Moleküle jener Flüssigkeiten. Nach Erörterung der verschiedenen Begriffe des optischen Drehvermögens und der für die Behandlung wichtigen Grundlagen wird die Behandlung des optischen Drehvermögens nach der elektromagnetischen Theorie durchgeführt. Es folgt die quantenmechanische Theorie des optischen Drehvermögens. Anschließend finden die von Born, Oseen und Kuhn bzw. von Condon, Altar und Eyring ihren Behandlungen zugrunde gelegten Molekularmodelle — das gekoppelte Oszillatormodell bzw. das einfache Oszillatormodell — ihre theoretische Darstellung. Weiter wird der Einfluß eines Lösungsmittels sowie der zirkulare Dichroismus untersucht.

Picht (Neubabelsberg).

Cotte, Maurice: Sur les systèmes orthogonaux de l'optique électronique et leur application à la spectroscopie. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 974—976 (1937).

Die vom Verf. in einer früheren Arbeit [C. R. Acad. Sci., Paris 205, 129 (1937); dies. Zbl. 17, 43] abgeleiteten Formeln werden hier auf verschiedene Einzelfragen angewandt, und zwar 1. zur Klassifizierung der Gaußschen Systeme, 2. auf den Fall, daß es sich um diskontinuierliche Felder handelt, und 3. zur Bestimmung des Winkels, unter dem eine photographische Platte in einem — elektronenoptischen — Spektral- apparat gegen die mittlere Trajektorie geneigt sein muß, damit das aufgenommene Spektrum möglichst geringe Abbildungsfehler aufweist.

Picht (Neubabelsberg).

Quantentheorie:

Scherrer, W.: Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips. II. Mitt. Helv. phys. Acta 10, 387—399 (1937).

Frühere Betrachtungen desselben Verf. (dies. Zbl. 16, 238) weiterführend werden verschiedene Konsequenzen — insbesondere ein hypothetischer Ausdruck für die ponderomotorische Kraft zweier Teilchen — einer skalaren, vierdimensionalen (raum- zeitlichen) Potentialgleichung entwickelt.

O. Klein (Stockholm).

Hély, Jean: Sur une théorie synthétique de la gravitation et de l'électromagnétisme. J. École polytechn., III. s. 143, 271—281 (1937).

Hély, Jean: Sur une théorie gravifique de la lumière. J. École polytechn., III. s. 143, 282—283 (1937).

Versuche, Relativitätstheorie und Lichtquantentheorie durch andersartige Ideen zu ersetzen.

P. Jordan (Rostock).

Sokolow, A.: Neutrino theory of light. *Nature*, Lond. **139**, 1071 (1937).

Durch eine etwas veränderte Darstellung der Lichtamplituden durch die Neutrinoamplituden werden gewisse von Fock (dies. Zbl. **16**, 428) hervorgehobene formale Schwierigkeiten der sog. Neutrinotheorie des Lichts vermieden (vgl. dies. Zbl. **17**, 45).

O. Klein (Stockholm).

Wannier, Grégoire: Remarque sur les effets de polarisation pour l'électron de Dirac. *Arch. Sci. Physiques etc.* **19**, 111—118 (1937).

Im Anschluß an ein von Stueckelberg (dies. Zbl. **10**, 381) entwickeltes Störungsverfahren für die Diracsche Wellengleichung wird die Störungsmatrix eines durch zwei Lichtfelder bewirkten Prozesses zweiter Ordnung untersucht. Das Ergebnis der matrixalgebraischen Betrachtungen — wenn beide Felder linear polarisiert sind, spielt der Elektronenspin keine Rolle; wenn ein Feld zirkular polarisiert ist, kann das Resultat nach Mittelung über die Spinzustände auf den ersten Fall zurückgeführt werden — wird auf verschiedene Fälle (Streustrahlung, Bremsstrahlung, Paarbildung) angewandt.

O. Klein (Stockholm).

Hoyle, F.: Capture of orbital electrons. *Nature* **140**, 235—236 (1937).

Nach der Fermischen Theorie des β -Zerfalls kann ein Kern, der normalerweise Positronen emittiert, statt dessen ein Elektron aus der K -Schale absorbieren. Die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses hängt jedoch im einzelnen von dem Ansatz für das Wechselwirkungsglied in der Fermischen Theorie ab, und die Theorie darf daher noch nicht als widerlegt angesehen werden, wenn experimentell dieser Prozeß seltener ist, als er nach dem Uhlenbeck-Konopinskischen Ansatz sein sollte. Der Ansatz, der zu einer kleineren Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß führt, bedingt auch eine bestimmte Form des Elektronenspektrums in der Nähe der oberen Grenze. *R. Peierls*.

Schiff, L. I.: Scattering of neutrons by deuterons. *Physic. Rev.*, II. s. **52**, 149—154 (1937).

Die Streuung von Neutronen an schwerem Wasserstoff wird als Zweikörperproblem behandelt.

R. Peierls (Birmingham).

Wilson, A. H.: The second order electrical effects in metals. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **33**, 371—379 (1937).

Es wird eine mathematische Methode entwickelt, um die Gleichungen der Elektronentheorie der Metalle bis zur zweiten Näherung zu behandeln, d. h. in der Näherung, in der die Wärmeleitung und die thermoelektrischen Effekte auftreten. Hierbei werden bestimmte vereinfachende Annahmen über die Stoßwahrscheinlichkeiten gemacht, die von der Blochschen Theorie übernommen werden. Es wird gezeigt, daß, im Gegensatz zu einer Vermutung von Brillouin, die thermodynamischen Beziehungen zwischen den thermoelektrischen Effekten streng erfüllt sind. Die Resultate sind qualitativ im Einklang mit dem Experiment.

R. Peierls (Birmingham).

Relativitätstheorie.

Ives, Herbert E.: The Doppler effect considered in relation to the Michelson-Morley experiment. *J. Opt. Soc. Amer.* **27**, 389—392 (1937).

Oseen, C. W.: Contributions à la théorie de relativité. I. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **25 A**, Nr 30, 1—10 (1937).

The author makes the substitution $x_0 = r \cosh \vartheta_1 \cosh \vartheta_2$, $x_1 = r \cosh \vartheta_1 \sinh \vartheta_2$, $x_2 = r \sinh \vartheta_1 \cosh \vartheta_3$, $x_3 = r \sinh \vartheta_1 \sinh \vartheta_3$ in the special-relativity differential equation

$$\Delta_2 \varphi \equiv -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0,$$

and then obtains solutions of the form $r^n \mathfrak{Y}_{\alpha, \beta}^{(n)}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$. He next finds the law of transformation of the "hypospherical functions" $\mathfrak{Y}_{\alpha, \beta}^{(n)}$ under a general unimodular Lorentz transformation, and shows that the coefficients in the equations expressing

this law, which are functions of the components of the corresponding spin transformation, have certain properties of orthogonality. Consideration is also given to Lorentz transformations of negative determinant. The paper concludes with a concise statement of the Einstein-Mayer theory of semivectors (this Zbl. 6, 229, 7, 233; see also Ullmo, this Zbl. 9, 335), and a demonstration of its equivalence to the theory of 2-component spinors.

H. S. Ruse (Southampton).

Silberstein, Ludwik: On Einstein's gravitational field equations. Philos. Mag., VII. s. 24, 814—822 (1937).

It is shown that Einstein's field-equations for empty space ($R_{ij} = 0$) admit no spherically symmetrical solutions varying in time, i.e., that such solutions are necessarily statical. This result is perhaps not surprising, for a variable spherical field implies a varying centre of mass, and hence a (non-empty) surrounding space containing matter or radiation. But the author scents a real difficulty in the Einstein theory when, in the second part of the paper, he obtains a similar result for an empty axially symmetric universe. Since the most general statical world of this type is known to be of the form

$$ds^2 = g_1(dx_1^2 + dx_2^2) - x_1^2 g_4^{-1} dx_3^2 + g_4 dt^2, \quad (*)$$

where g_1, g_2 are functions of x_1, x_2 , he takes this as the metric but assumes that the g 's depend also on t . The field equations yield the result that the g 's must in actual fact be independent either of t or of x_2 . The former possibility gives the statical case, and the latter cases which are physically inadmissible because, inter alia, the g 's become infinite for certain values of the variables. So the statical solution is the only acceptable one. Yet, the author argues, a variable cylindrical field can be associated, for example, with two constant masses moving along the line joining them, so that the surrounding space need contain neither matter nor radiation, and non-statical empty cylindrical universes must therefore exist. He does not, however, attempt to show that these need be of the particular form (*), which he admits may not be the most general line-element for an axially symmetric field. H. S. Ruse.

Shabde, N. G.: Identities between field-equations in the general field-theory of Schouten and van Dantzig. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 186—197 (1937).

Gewisse vom selben Verf. früher (dies. Zbl. 15, 279) abgeleitete Identitäten in der projektiven Fassung der allgemeinen Relativitätstheorie werden durch direkte Rechnung verifiziert.

O. Klein (Stockholm).

Yano, Kentaro: Sur la théorie unitaire non holonome des champs. I. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 867—896 (1937).

Verf. gibt eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen generellen Feldtheorien (von Weyl, Kaluza-Klein, Einstein-Mayer, Veblen-Hoffmann, Schouten-van Dantzig, Pauli und Vranceanu). Das Ziel dieser Arbeit ist, nach der Methode von Vranceanu eine Feldtheorie aufzubauen, ausgehend von einer nichtholonomen V_5^4 (vgl. dies. Zbl. 15, 279). Dieser erste Teil enthält einige geometrische Vorbereitungen. Es wird angenommen, daß eine V_5 ($ds^2 = G_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$) eine infinitesimale Bewegung $x'^\mu = x^\mu + \delta_5^\mu dt$ gestattet, die alle Punkte über denselben Abstand verschiebt (dies. Zbl. 15, 424). Dann ist G_{55} eine Konstante (es wird $G_{55} = 1$ gesetzt), und aus der Killingschen Gleichung geht hervor $\delta_5 G_{\lambda\mu} = 0$. Diese Gleichungen sind invariant bei den folgenden Transformationen: $x'^h = x^h(x^1, \dots, x^4)$, $x'^5 = x^5 + f(x^h)$; ($h = 1, 2, 3, 4$). Die x^h können als Urvariablen einer V_4 aufgefaßt werden. Die V_5^4 ist nun definiert durch das kovariante Vektorfeld $\varphi_\lambda = G_{\lambda 5}$. Man hat also eine V_4 , eine V_5^4 und eine V_5 , und die Beziehungen zwischen den Affinoren dieser Mannigfaltigkeiten werden angegeben. Für Affinoren, deren Bestimmungszahlen nur von x^h abhängen, ist das kovariante Differential linear in dx^h . Verf. beweist, daß die zugehörige kovariante Ableitung die drei Eigenschaften hat, die in der Theorie von Einstein-Mayer als Postulate vorausgesetzt werden.

J. Haantjes (Delft).

Weyssenhoff, J.: *Metrisches Feld und Gravitationsfeld*. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 252—259.

In the terminology of the author a "metrical field" is a region of space-time with determined metric and a "gravitational field" is a metrical field containing a given congruence of time-like curves, which are regarded as the world-lines of the points of a frame of reference. The coordinates ξ^i are chosen so that the curves of the congruence of reference are the parametric lines of ξ^4 , but are otherwise arbitrary. Thus the transformations considered are of the form $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\xi^{4'} = \xi^{4'}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$, Greek suffixes having the range 1, 2, 3 and Latin suffixes the range 1, 2, 3, 4. Expressions, tensorial with respect to such transformations, are given for the acceleration γ^α of the reference system, its deformation $\varepsilon_{\alpha\beta}$ and its rotation $\omega_{\alpha\beta}(= -\omega_{\beta\alpha})$. The author shows that the conditions for the existence of orthochronic coordinates are $\omega_{\alpha\beta} = 0$. — The connection of the paper with established theory would be easier to see had the author paid less attention to his special coordinates and regarded his problem as that of the discussion of the geometrical properties of a given congruence in space-time. Thus his vector γ^α is essentially the same as the first curvature vector of the world-line, and the conditions $\omega_{\alpha\beta} = 0$ are the conditions that the congruence be normal. Reference might have been made to the work of A. J. McConnell on strain and torsion in Riemannian space [Ann. di Mat. 6, 207—231 (1928/29)]. *Synge*.

Astrophysik.

Luyten, W. J., and E. L. Hill: *On the origin of the solar system*. Astrophys. J. 86, 470—482 (1937).

Lyttleton (dies. Zbl. 14, 43) hatte die Möglichkeit erörtert, daß die Sonne einst ein Doppelstern war und der Begleiter ihr durch einen vorbeikommenden Stern entrissen wurde; indem dieser Stern dem Begleiter sehr nahe kam, sollen durch die dabei auftretenden Flutkräfte bedeutende Massen herausgerissen worden sein, von denen einige als das jetzige Planetensystem bei der Sonne verblieben sind. Verff. zeigen nun, daß dies kaum möglich ist. Erstens wäre die Energie, die erforderlich ist, um die nötige Masse aus den Sternen herauszureißen, so groß, daß die Relativgeschwindigkeit mindestens etwa 100 km/sec gewesen sein müßte. Zweitens berechnet er, daß bei einem derartigen Herausreißen die Geschwindigkeitsverteilung der Bruchstücke derart hätte sein müssen, daß die Sonne höchstens 6% der Bruchstücke hätte festhalten können, so daß die Relativgeschwindigkeit noch viel höher hätte sein müssen.

G. Schrutka (Wien).

Anderson, Wilhelm: *Zu H. Vogts Ansichten über die obere Grenze der Sternmassen*. Acta et Comment. Univ. Tartu A 31, Nr 2, 1—7 (1937).

A reply to Vogt's criticism [Astron. Nachr. 260, 281 (1936)] of previous work by the author (this Zbl. 14, 236), with particular reference to the possible existence of a matter-free zone round the centre of a star.

W. H. McCrea (Belfast).

Sevin, Émile: *Sur le jeu des sources de l'énergie stellaire*. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 841—843 (1937).

Some consequences of the assumption that the rate of energy-liberation per unit mass at any point of a star is proportional to the square of the radiation pressure and the square root of the temperature, and inversely proportional to the product of the material pressure and total pressure. No reasons are given for this hypothetical law.

W. H. McCrea (Belfast).

Chandrasekhar, S.: *The stability of the radiative gradients in the interior of a star*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 572—577 (1937).

The author derives the usual results about the instability of the radiative temperature gradient in a spherical distribution, if this exceeds the adiabatic gradient. But he does so in a manner which makes clear the assumptions on which the con-

clusions rest. By examining these assumptions, he shows that we cannot at present make definite predictions about the nature of the convection currents that would be set up under these circumstances, by the break-down of the unstable distribution, in the case when radiative pressure is important. When this is not important, the equations of adiabatic equilibrium, which he gives, probably describe the actual state set up. He further points out that, in the literature, these equation are sometimes used in conjunction with an inconsistent one which actually presupposes a radiative gradient.

W. H. McCrea (Belfast).

Wurm, Karl: Boltzmann-Verteilung und Intensitäten von Emissionslinien in ausgedehnten Sternchromosphären bei vorwiegender Elektronenstoßanregung. *Z. Astrophys.* 14, 321—340 (1937).

In the introduction to the present paper the author gives a short discussion of the excitation mechanism of the forbidden lines in planetary nebulae; they are, according to Bowen, excited by electronic collisions. This fact suggests that generally in stars with emission lines the lines originating from low levels are excited mainly by collisions, in particular electronic collisions. The author now investigates the problem of the relative intensities of forbidden and normal lines excited in this way. It is shown that by decreasing density the metastable levels will be more densely occupied than the normal ones. In consequence of this and of the relatively small differences in excitation probabilities for normal and metastable levels at the electronic velocities considered here, the lines with small and large transition probabilities tend to become equally intense. The writer also discusses the occurrence of forbidden oxygen lines in discharge tubes (experiments of Hopfield), and makes some remarks on recombination processes in stellar atmospheres. He finally discusses briefly the difficult and unsolved problem of the mechanism by which the chromosphere gets the energy necessary for the production of the emission lines.

Steensholt (Oslo).

Jung, B.: Die Entstehung fester Partikel im interstellaren Raum. *Astron. Nachr.* 263, 425—436 (1937).

Die Entstehung fester Partikel im interstellaren Raum hat Lindblad durch die Annahme zu erklären versucht, daß Gasatome beim Auftreffen auf kleine, sehr kalte Kondensationskerne haften bleiben. Demgegenüber betont der Verf., daß dieser Vorgang sehr erschwert wird durch die elektrostatische Abstoßung, die sicher stattfindet, weil das Gas ionisiert ist und bei dem festen Metall der photoelektrische Effekt auftritt. Das Aufladungspotential der festen Substanz sowie der Ionisationsgrad des Gases werden für den Fall des Eisens berechnet. Daraus ergibt sich in der Tat, daß bei Verhältnissen, wie sie heute im Sternsystem herrschen, das Wachstum fester Teilchen nur äußerst langsam vor sich gehen könnte, während bei Dichten von mehr als etwa 10^{-22} g/cm³ praktisch keine Verzögerung eintritt.

Straßl (Göttingen).

Ambarzumian, V.: On the distribution of space velocities of B and F type stars. *Publ. Observ. Astron. Univ. Leningrad* 7, 21—32 (1936).

Als Anwendung seiner in *M. N.* 96, 172 (1936) (vgl. dies. Zbl. 13, 233) dargestellten Methode zur Bestimmung der Verteilungsfunktion der wahren Raumgeschwindigkeiten aus der durch Beobachtung zu gewinnenden, vom Ort an der Sphäre abhängigen Verteilungsfunktion der Radialgeschwindigkeiten berechnet der Verf. aus Material von Lick und Simeis unter Beschränkung auf die galaktischen Breiten zwischen $+20^\circ$ und -20° die Verteilungsfunktion der auf die galaktische Ebene projizierten Raumgeschwindigkeiten für drei Gruppen von Sternen: 1. B 0—B 3, $m \leq 7$ (516 Sterne), 2. B 5—B 9, $m \leq 7$ (398 Sterne), 3. F 0—F 8 ohne Trennung nach Riesen und Zwergen (379 Sterne). Die Ergebnisse stimmen im Fall der B-Sterne mit den Resultaten der früheren Methoden überein, während bei den F-Sternen noch ungeklärte Abweichungen vorhanden sind.

Straßl (Göttingen).

McVittie, G. C.: Nebular counts and hyperbolic space. *Z. Astrophys.* 14, 274—284 (1937).

This paper is a re-examination of the comparison of Hubble's empirical results

with the predictions of general relativity theory. Hubble [Monthly Not., Roy. Astron. Soc. 97, 506 (1937)] has criticised previous work of the author (Cosmological Theory, 1937, Chapter IV) on this subject. In the present paper the author uses Hubble's own method of extrapolation, but obtains results agreeing qualitatively with his previous ones, though the numerical values are different, and diverging considerably from Hubble's conclusions. The author first describes Hubble's methods of expressing his empirical results on the dependence of red-shift δ on apparent magnitude and on the number of nebulae N down to given apparent magnitudes. He himself adopts a slightly different mode of expression. From these results he derives a formula for $dN/d\delta$ as a function of δ , following Hubble's method of extrapolation. He then compares this with McCrea's theoretical formula for $dN/d\delta$ for the general isotropic homogeneous expanding universe of general relativity theory (this Zbl. 11, 41). In order to derive numerical results, it is necessary to have a value of the mean mass M of a nebula; estimates vary from 2×10^9 to 2×10^{11} times the mass of the sun. The author obtains for the mean density ρ of matter in the universe, corresponding to these limits of M , values $8,29 \times 10^{-31}$ and $8,29 \times 10^{-29}$ g/cm³. These results depend only on the first term in the formula for $dN/d\delta$. From the second term the author derives information about the curvature of space, but the results depend upon the probable errors in the observational constants, so that they give only values lying between certain limits. He finds, using the lower limit of ρ , that space is necessarily hyperbolic, with present radius R_0 satisfying $1,02 \times 10^9 \leq R_0 \leq 1,56 \times 10^9$ parsecs. Using the upper limit of ρ , he finds corresponding to the limits of error of the constants a closed spherical space with $R_0 = 1,76 \times 10^9$ parsecs and a hyperbolic space with $R_0 = 2,1 \times 10^9$ parsecs. Thus the balance of evidence is in favour of hyperbolic space. He finds also for the "cosmical constant" Λ the inequality $5,94 \times 10^{-34} \leq \Lambda \leq 8,20 \times 10^{-34}$ sec⁻². Hubble on the other hand finds a comparison with relativity theory to give a spherical space of much smaller radius and higher mean density. The author considers that the discrepancy arises through Hubble's different method of comparing theory and observation, which depends on an illegitimate "correction" for dispersion of absolute magnitudes of nebulae in the theoretical model, and also upon an assumed effective temperature of the nebulae. *W. H. McCrea* (Belfast).

McVittie, G. C.: Kinematical theory and the distribution of nebulae. *Z. Astrophys.* 14, 312—320 (1937).

If N is the number of nebulae over the whole sky showing an average red-shift δ , then, as shown by the author in a previous paper (see the prec. review, Hubble's nebular counts lead to the formula $\frac{dN}{d\delta} = Q\delta^2(1 + A\delta + \dots)$,

where Q, A are certain constants whose approximate numerical values are given. The author now obtains the theoretical value of $dN/d\delta$ on the assumption that the metric of space-time is given by

$$ds^2 = \frac{dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)/c^2}{[1 - K^2(t^2 - r^2/c^2)]^2}, \quad (*)$$

and shows that it is possible to find a non-zero value of K which gives agreement between the two formulae as far as the term in δ^3 . The corresponding formula in Milne's kinematical theory, in which $K = 0$, gives agreement only up to the term in δ^2 , and the author therefore concludes that Milne's theory plays the part of a first approximation only, a second approximation being obtained by taking the curved space-time (*). Moreover, this introduction of curvature leads to an increase of the time-scale whose shortness is one of the difficulties of Milne's theory. Lastly, it is suggested that the necessity for introducing curved space-time indicates that Milne's principle of the "absence of dimensional constants" in his gravitational theory requires modification.

H. S. Ruse (Southampton).